Le Dobble des mathématiques

Paul, Nathan, Timothée, Emilie, Diane (classe de 3e)

Encadrés par : Amandine GRANIER

Établissement : Collège La Rose Blanche 75017 Paris

Chercheur : Félix CHEYSSON (AgroParisTech)

Nos recherches ont pu être guidées grâce à notre chercheur Felix Cheysson et Amandine Granier notre professeur de mathématiques.
Nous avons donc commencé par tester des cartes de jeux à fabriquer le but étant de comprendre les secrets mathématiques de la fabrication du dobble.(1)
(4)
La carte d'un symbole :
Une carte d'un symbole n'aurait par définition qu'un symbole et ne serait pas intéressante pour un jeu.(2)

Carte pour 2 symboles possibles :
Après avoir testé plusieurs fois, nous avons trouvé 3 cartes au maximum et au moins 3 symboles différents(3).
Mais un jeu avec seulement 3 cartes n'est toujours pas intéressant, il se finirait trop rapidement.

Carte pour 3 symboles possibles :
De la même façon que pour les précédents tests, nous sommes partis d'une carte de base possédant 3 symboles que nous avons illustrés par une étoile, un soleil et une fleur puis nous avons continué à créer des cartes et adapter le jeu à la règle. De cette façon, nous avons trouvé 7 cartes différentes et 7 symboles distincts.

Carte pour 4 symboles possibles :
Les tests devenaient longs et peu rigoureux, c'est à ce moment qu'il nous a fallu trouver une stratégie. Nous avons donc arrêté de prendre des symboles mais avons pris des chiffres et nombres(5).

Tout d'abord, nous commençons par créer une base de 4 nombres avec le 1, puis nous ajoutons le 2 sur une carte 1 et on crée ainsi 3 nouvelles cartes. Il faut ensuite faire la même chose pour 3 et 4. Puis nous complétons toutes les cartes créées en veillant à respecter la propriété qui est que 2 cartes ne doivent pas avoir plus d'un nombre/symbole/chiffre en commun. Alors nous obtenons donc 13 cartes de 4 symboles chacune.

1 2 3 4
1 5 6 7
1 8 9 10
1 11 12 13
2 5 8 12
2 6 9 11
2 7 10 13
3 5 10 11
3 6 8 13
3 7 12 9
4 5 9 13
4 6 10 11(6)
4 7 8 12(7)

Nous avons ensuite fixé des notations, on a appelé le nombre de cartes au total N, le nombre de symboles par cartes P et le nombre de symboles au total S.

Démonstration 1 :

Arrive notre première démonstration, elle nous a été suggérée par la question suivante :
Dans le cas où il y aurait 3 symboles par carte un symbole peut-il se retrouver sur 5 cartes différentes ?

Pour y répondre, nous avons d'abord repris nos premiers tests pour 3 symboles par carte puis nous avons remplacé les symboles par des chiffres et des nombres afin de mieux « se retrouver ». Nous avons choisi comme symbole de base 1. Ensuite nous avons créé une 5^{e} carte supposée, configurée d'un nouveau symbole de base, 2. On se rend donc compte que la carte ne serait pas valide car elle ne fonctionnerait pas avec les autres cartes. Elle nécessiterait la création de nouveaux symboles afin de respecter la propriété d'avoir un seul symbole commun avec chaque carte.

1 2 3

1 4 5

1 6 7

1 8 9

---

2 4 6

Démonstration n°2 :

Toujours dans le même principe, avec différentes valeurs :
Dans le cas où il y aurait 3 symboles par carte un symbole peut-il se retrouver sur 4 cartes différentes ?

On met en place 4 cartes de 3 symboles si nous supposer créer une 5ème carte, celle-ci ne fonctionnerait pas car il n'y aurait aucun symbole en commun avec les autres.

123
145
167

189
246

Conclusion : à la vue de ces deux démonstrations nous pouvons constater que dans un jeu à trois symboles par carte, un même symbole ne peut se retrouver que sur 3 cartes.(8)

→ Ainsi, on peut supposer que dans un jeu à p symboles par carte, un même symbole ne peut se retrouver que sur p cartes au maximum.

Démonstration n°3 :

Lors de la démonstration 3, on fixe une C (elle a S symboles S1, S2 jusqu'à Sp dont un Symbole commun avec les autres cartes)

En fonction de p, sur combien de cartes un même symbole peut-il se trouver ?

Dans un jeu où il y a p symboles/carte.
Si on suppose que le symbole S1 se trouve sur q cartes. Alors ces q cartes n'ont qu'un seul symbole en commun : S1. Tous les autres symboles sont distincts.
Si on s'intéresse à une carte qui ne possède pas le symbole S1, alors elle doit avoir un symbole en commun avec chacune des autres cartes(9).
Il faut donc qu'il y ait au minimum q symboles différents.Or dans ce jeu, on sait qu'il y a p symboles par carte donc q ≤ p.

Conjecture :

Nous allons analyser les valeurs trouvées dans la première partie de l'exposé et nous allons tenter de conjecturer puis démontrer cette formule :

1 (1-1)+1=1-1+1=1

2 (2-1)+1 = 4-2+1= 3

Les résultats sont 1 et 3

On en ressort une conjecture par déduction visuelle pour déterminer le nombre de cartes maximum possible. (p= Nombre de symbole par carte)

La conjecture est **p (p-1)+1(10)**

Notes d'édition
(1) Nos jeunes chercheurs ont omis de nous expliquer le jeu de « dobble » : c'est un jeu de cartes. Sur chaque carte figure un certain nombre de « symboles » (fleur, étoile, soleil... ; par la suite ces symboles seront des nombres). Deux cartes prises au hasard ont un commun un et un seul symbole. Le problème étudié est le suivant : si chaque carte comporte *p* symboles, combien de cartes peut on avoir dans le jeu au minimu (si on veut plus d'une carte par jeu) ?
(2) Traduction : si il n'y a qu'un symbole par carte, on peut avoir autant de cartes qu'on veut, toutes semblables (ce qui, il est vrai n'est pas très intéressant)

(3) Ce n’est pas le cas « au moins 3 symboles» qui est traité ici, mais le cas « exactement 2 symboles par carte».
(4) Dans la suite il faut lire, à la place de « Carte pour un symbole, deux symboles... » : « Nombre de cartes pour un symbole, deux symboles... par carte»
(5) Il s’agit ici plutôt de « nombres ».
(6) Mauvaise pioche : c’est plutôt 4, 6 10, 12.
(7) Et ici c’est : 4, 7, 8, 11 !
(8) Plus précisement : dans un jeu à trois symboles avec le minimum nécessaire de cartes, un symbole ne peut se retrouver que sur 3 cartes.
(9) Plus précisément : cette carte doit avoir un symbole en commun avec chacune des q cartes sur lesquelles ont trouve le symbole S1. Cette carte contient donc au mouns q symboles distincts.
(10) On peut remarquer que cette formule est vraie aussi pour p=4.