Jeu du Dobble

Année 2016- 2017

Élèves : COSTE Rémi (1èreS), LE POUHAER Elouan (1èreS), CHERIF Noor (1èreS), BOUMAHDI Soumeya (1èreS), LE BRUN COSTES Margaux (1èreS), BENOIST Tiphaine (1èreS), ALMEIDA Lise (1èreS), FOURNIER Valentine (1èreS), ANDRE Ethan (TermS), ROBERT Sylvain (Term S), LINOTTE Alexandre (Term S).

Établissements : lycée Henri Matisse (Cugnaux 31) et lycée Jean-Pierre Vernant (Pins-Justaret 31)

Enseignants : Lionel MARQUET, Adeline GILLIBERT, Guilhem MAZET, Cécile DUBOIS, Virginie VALETTE.

Chercheur : Jean GILLIBERT (Université Toulouse 2)

1-Présentation

Dobble est un **jeu d'observation** et **de rapidité** dans lequel tous les joueurs jouent en même temps. Il fut inventé en 2009.
Le jeu comporte **55 cartes rondes**, avec **8 dessins** sur chacune. Chaque carte a un unique dessin commun avec n'importe quelle autre carte du paquet. Le but du jeu est donc de trouver en premier le dessin commun.

Là où les mathématiques entrent en jeu, c'est que quel que soit le couple de cartes retournées, il y a toujours un (et un seul) **symbole commun**. La conception des cartes n'a donc pas du tout été faite au hasard, et n'est pas du tout évidente à priori.

Comment fabriquer soi-même son propre jeu Dobble ? Combien faut-il prévoir de cartes ? De symboles ? Puis-je faire un Dobble à 157 cartes ? Il n'y a qu'une seule façon de résoudre le problème : comprendre les règles mathématiques qui se cachent derrière la construction d'un tel jeu.

→On cherche donc une formule qui permettrait de calculer le nombre de cartes possibles pour un jeu de Dobble en fonction du nombre de symboles utilisés et/ou du nombre de symboles par carte.

2-Définitions, règles

Dans un premier temps, donnons des noms aux données du problème.

- On note D le nombre de cartes d'un jeu Dobble
- On note S le nombre total de symboles utilisés dans le jeu.
- On note n le nombre de symboles apparaissant sur une carte.

Nous avons alors construit à la main des jeux de Dobble pour les premières valeurs de n (1, 2, 3, 4, 5 …). Nous avons alors remarqué :

- Pour n fixé, on peut construire plusieurs jeux possibles.
- Si on utilise un nombre maximal de symboles, alors $S = D$.
- Enfin, $D = n \times (n - 1) + 1$

On cherche alors à démontrer ces résultats.

Maintenant, déterminons les hypothèses de départ.

- (R1) On appelle ***jeu de Dobble*** un jeu de cartes comprenant chacune plusieurs symboles dans lequel chaque couple de cartes admet un unique symbole commun.

- (R2) On appelle jeu de Dobble ***d'ordre n*** un jeu de Dobble dans lequel chaque carte comporte n symboles.

- (R3) On appelle jeu ***maximal*** de Dobble d'ordre n un jeu de Dobble d'ordre n qui utilise un nombre maximal de symboles.

- (R4) On appelle jeu maximal ***complet*** de Dobble d'ordre n un jeu maximal de Dobble d'ordre n dans lequel chaque paire de symboles apparaît sur une et une seule carte.

- (R5) Un symbole ne peut pas apparaître sur toutes les cartes du jeu (cela empêcherait le jeu d'être complet (R4)). (1)

Remarque : la règle (R4) est la condition pour que la formule que nous avons trouvée soit vraie. En effet, on s'est rendu compte que la formule qui se dégageait n'était pas vraie pour n=7 (par exemple).(2)

3-Démonstrations

Pour démontrer notre formule $D = n \times (n - 1) + 1$ nous avons besoin de la propriété suivante :

Propriété 1 :	Dans un jeu maximal complet de Dobble d'ordre n, chaque symbole apparaît exactement sur n cartes.

Démonstration :

Considérons un symbole A. Notons a le nombre de cartes contenant A.
Les cartes avec A n'auront pas entre elles d'autres symboles communs que le A (R1). Les autres symboles sont donc tous différents.

Montrons que $a \leqslant n$

Si l'on rajoute une carte qui ne contient pas de symbole A, elle devra donc avoir un symbole commun avec chaque carte précédente contenant A. Comme cette carte ne peut contenir que n symboles, les cartes contenant un A ne devront, elles non plus, pas apparaître plus de n fois. Donc $a \leqslant n$.

Exemple : Jeu avec n=3. Supposons qu'il y ait 4 symboles A.

1. A B C
2. A D E
3. A F G
4. A H I → n'a pas de symbole commun avec la carte 5 !
5. B D F

Montrons que $a < n$ est impossible

Supposons que le symbole A apparaît seulement n-1 fois.
D'après la règle (R5), il existe une carte ne contenant pas le symbole A. Elle doit cependant avoir un symbole commun avec chacune des cartes contenant A (d'après (R1)).
Comme il n'y a que n-1 cartes contenant A, cela ne remplit pas cette nouvelle carte. Ajoutons-lui un nouveau symbole K.
K ne peut pas être sur les cartes contenant A sinon, la nouvelle carte aurait deux symboles en commun avec la carte contenant A et K.
Alors, la paire (A ; K) n'existe pas, ce qui contredit la règle (R4).

Exemple : Jeu avec n=3. Supposons qu'il n'y ait que 2 symboles A.

1. A B C
2. A D E
3. B D K → Le symbole K n'a aucune paire avec A.

Conclusion ***a = n donc chaque symbole doit apparaître exactement n fois.***

Propriété 2 : Dans un jeu maximal complet de Dobble d'ordre n, le nombre de cartes est donné par la formule n(n-1)+1.

Démonstration :

<u>Montrons que $D \geqslant n(n-1)+1$</u>

Comme le jeu est maximal, il y a suffisamment de symboles pour construire au moins une carte. On note c_1 cette première carte.
c_1 contient donc n symboles.
Chacun de ces n symboles doit apparaître sur n cartes différentes (Propriété 1), dont c_1.
Or, ces n symboles ne peuvent plus être sur la même carte (sinon, il y aurait deux symboles communs avec c_1). Cela correspond donc à construire des cartes toutes différentes : chacun des n symboles apparaîtra donc sur (n-1) cartes différentes en plus de c_1.
On obtient donc $n \times (n-1)+1$ cartes.
Ainsi $D \geqslant n \times (n-1)+1$

<u>Montrons que $D > n(n-1)+1$ est impossible.</u>

Supposons qu'il existe une carte supplémentaire.
Elle a donc un symbole commun avec c_1.
Ce symbole apparaîtra donc une fois de plus c'est-à-dire n+1 fois.
Cela contredit la propriété 1 !!
Donc $D > n \times (n-1)+1$ est impossible.

<u>Conclusion :</u> ***on a bien $D=n \times (n-1)+1$***.

Démontrons enfin que $S = D$:

Propriété 3 :	Dans un jeu maximal complet de Dobble d'ordre n, le nombre total de symboles est égal au nombre de cartes de Dobble.

Démonstration :

On sait que $D = n \times (n - 1) + 1$
Comptons le nombre de symboles S.
Pour cela, notons P le nombre de paires de symboles différents contenant le symbole A.

Exemple : calculons P avec 5 symboles.
On a $S = 5$.
Notons ces symboles A, B, C, D et E.
Nous pouvons faire 4 paires contenant le symbole A, toutes différentes :
(A ;B), (A;C), (A;D), (A;E)

Ainsi $S=5$ et $P=4$

Calculons P à partir des symboles :

Dans le cas général, on peut associer le symbole A avec n'importe lequel des autres symboles. Cela nous donne donc S-1 paires contenant A.
Donc $P = S - 1$

Calculons P à partir des cartes du Dobble :

On sait qu'un jeu maximal complet de Dobble d'ordre n est un jeu dans lequel chaque paire apparaît sur une et une seule carte (R4).
On peut donc trouver P en comptant les paires contenant A apparaissant sur les cartes.
Ainsi, sur chaque carte contenant le symbole A, il y a n symboles donc on peut faire n-1 paires contenant A.
Or dans un jeu maximal complet de Dobble d'ordre n, chaque symbole apparaît exactement sur n cartes (Propriété 1), donc il y a n cartes contenant le symbole A.
Sur ces n cartes, on peut donc compter (n-1) paires contenant le symbole A.
Ainsi nous avons $n \times (n - 1)$ paires contenant A.
Donc $P = n \times (n-1)$

Comparons les formules :

$$\left.\begin{array}{l} P = S-1 \\ P = n(n-1) \end{array}\right\} \quad \text{On en déduit que } S - 1 = n \times (n-1)$$

$$\begin{aligned} S - 1 = n \times (n - 1) &\Leftrightarrow S = n \times (n - 1) + 1 \\ &\Leftrightarrow S = D \end{aligned}$$

Conclusion : ***le nombre de symboles est donc bien égal au nombre de cartes.***

4-Conclusion

Nous avons donc démontré que pour construire un jeu de Dobble maximal d'ordre n qui soit complet, on doit construire $n \times (n - 1) + 1$ cartes utilisant au total $n \times (n - 1) + 1$ symboles différents. De plus, la construction de ces cartes doit se faire en respectant la règle stipulant que chaque symbole apparaîtra sur exactement n cartes. (3)

Notes d'édition

(1) Les règles (R1) à (R4) sont des définitions. La règle (R5) est une propriété vérifiée par les jeux qui suivent la règle (R4).

(2) Avec n = 8 on trouve D = 57. Or le jeu de Dobble comporte 55 cartes. Il n'est pas complet.

(3) Une autre approche, géométrique celle-ci, du jeu de Dobble est visible à http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html.