Le Dobble

Année 2014- 2015

Cellya Sirot en Tale S ; Jean-Baptiste Fraisse en Tale S et Jammy Mariotton en Tale S

Lycée Jean Puy et Lycée Saint Paul à Roanne (42300)
Enseignantes : Mme Martinelli, Mme Gotte et Mme Kroll

Enseignant chercheur à l'université Jean Monnet de Saint Etienne : M.Chardard

En début d'année nous avons rencontré M.Chardard, enseignant chercheur à l'université Jean Monnet de Saint Etienne. Il nous a présenté plusieurs problèmes de recherche, dont un autour du jeu connu sous le nom « Dobble » dans le commerce. Ce sujet nous a intéressés et nous avons décidé de travailler à trois pour mener des recherches sur ce thème.

Voilà le problème qui nous a été présenté :

Dobble

Dobble se joue avec des cartes comme celles ci-dessous. À un moment donné, deux cartes sont retournées. Le premier qui trouve le symbole commun gagne.

Les cartes d'un jeu de Dobble doivent donc être de telle sorte qu'il y ait exactement un symbole en commun.

S'il y a n symboles sur chaque carte :

— Quel nombre maximal de cartes contiendrait le jeu de Dobble ?
Quel serait alors le nombre total de symboles différents ?

— Pourriez-vous donner une méthode pour réaliser un tel jeu ?

Partie 1 : Appropriation du problème

Nous avons dans un premier temps observé le jeu du Dobble et compris les contraintes de construction du jeu de cartes : Chaque carte porte huit symboles et quelles que soient les deux cartes choisies elles doivent avoir un et un seul symbole en commun.

Pour apporter des réponses aux questions posées par M.Chardard, nous avons d'abord étudié ce qui se passait pour des valeurs simples de n.

Ainsi dans un premier temps nous nous sommes intéressés aux cas où le jeu est constitué de cartes qui portent n=1 symbole puis n=2 symboles et encore n=3 symboles.

Partie 2 : Etude de cas simple

a) Cas de n=1

Considérons un jeu de cartes « Dooble » tel que chaque carte porte un seul emplacement pour un symbole.

On s'est posé deux questions :

- Quel est le nombre minimum de symboles différents nécessaires pour que ce jeu fonctionne ?
- Quel est alors le nombre maximum de cartes différentes dont le jeu peut être constitué ?

Tout d'abord on considère une première carte C1 et on lui attribue un symbole S1 (une étoile sur notre illustration). La carte C1 est pleine.

On considère ensuite une seconde carte C2. Comme elle doit avoir un symbole en commun avec C1, ce symbole est S1. La carte C2 est pleine et identique à la carte C2, ce qui n'est pas possible.

Dans le cas n= 1, où chaque carte porte un seul emplacement pour un symbole, le jeu est constitué d'un seul symbole et d'une seule carte. Jouer à ce jeu est impossible!

b) Cas de n=2

Considérons un jeu de cartes « Dooble » tel que chaque carte porte maintenant deux emplacements pour des symboles.

On se pose les mêmes questions :

- Quel est le nombre minimum de symboles différents nécessaires pour que ce jeu fonctionne ?
- Quel est alors le nombre maximum de cartes différentes dont le jeu peut être constitué ?

Tout d'abord on considère une première carte C1 et on lui attribue deux symboles S1 et S2 (une étoile et une fleur sur notre illustration). La carte C1 est pleine.

On considère ensuite une seconde carte C2. Comme elle doit avoir un unique symbole en commun avec C1, on choisit S1(étoile) et il faut un autre symbole S3 (champignon). La carte C2 est pleine.

On considère une autre carte C3. Elle doit avoir un symbole en commun avec C1 :

➔ Si on choisit le symbole commun S1(étoile), C3 doit avoir un unique symbole en commun avec C1, il faut un autre symbole pour la compléter. Ce ne peut pas être S3(champignon) car sinon la carte C3 serait identique à C2 . On utiliserait alors un autre symbole S4 (monstre).La carte C3 est pleine et a un unique symbole en commun avec C2 qui est S1(étoile).

(1)

- ➔ Si on choisit S2(fleur) le symbole commun avec C1, C3 doit avoir un unique symbole en commun avec C1, il faut un autre symbole pour la compléter. Comme elle doit aussi avoir un unique symbole en commun avec C2, ce doit être S3. La carte C3 est pleine.

Si on considère ensuite une autre carte C4. Comme elle doit avoir un symbole en commun avec les cartes C1,C2 et C3 et qu'elle ne porte que deux symboles, on en déduit qu'elle portera un symbole porté par deux autres cartes.

- ➔ Dans le 1er cas exposé pour C3, la carte C4, porterait le symbole S1 (étoile commune à C1 et C2) puis un second symbole qu'elle aurait en commun avec C3. Or C3 porte (S1, S4), la carte C4 porte déjà S1, donc elle porterait ensuite S4, ce qui la rendrait identique à C3.

- ➔ Dans le 2nd cas exposé pour C3, la carte C4, porterait le symbole S1 (étoile commune à C1 et C2) puis un second symbole qu'elle aurait en commun avec C3. Or C3 porte (S2, S3), la carte C4 porte déjà S1, donc elle porterait ensuite soit S2, ce qui la rendrait identique à C1, soit S3 ce qui la rendrait identique à C2.

Ainsi la carte C4 ne peut pas exister quelle que soit la carte C3 crée.

De plus, comme nous recherchons le nombre minimum de symboles pour la construction du jeu, c'est le 2nd cas exposé pour C3 qui rend la condition réalisée.

Dans le cas n= 2, où chaque carte porte deux emplacements pour des symboles, le jeu est constitué d'au moins trois symboles différents et de trois cartes au maximum. Jouer à ce jeu ne serait pas très intéressant !

c) Cas de n=3

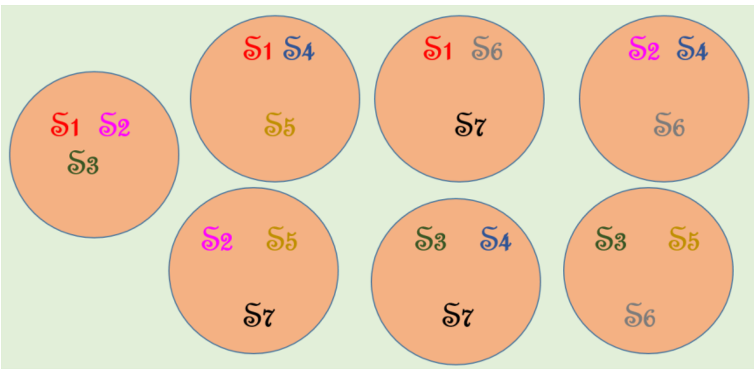
Considérons un jeu de cartes « Dooble » tel que chaque carte porte maintenant trois emplacements pour des symboles.

On se pose les mêmes questions :

- Quel est le nombre minimum de symboles différents nécessaires pour que ce jeu fonctionne ?
- Quel est alors le nombre maximum de cartes différentes dont le jeu peut être constitué ?

En procédant de façon semblable à ce qui a été fait précédemment, on a conjecturé que :

Dans le cas n= 3, où chaque carte porte trois emplacements pour des symboles, le jeu semble constitué d'au moins sept symboles différents et de sept cartes au maximum.



d) Conjecture

Nous avons ensuite cherché à conjecturer le nombre minimum de symboles différents et le nombre maximum de cartes que contient un jeu Dobble lorsque les cartes présentent n emplacements (où n ∊ς)

A l'aide d'une recherche documentaire sur internet nous avons trouvé que le jeu vendu dans le commerce (avec n=8 emplacements par carte) est constitué de 57 symboles différents et 55 cartes. M.Chardard nous avait laissé entendre que celui-ci n'était pas optimal et nous avons lu qu'il pourrait être constitué de 57 cartes.

Nous avions donc les éléments suivants en notre possession :

Nombres de symboles/carte (n)	Nombre de cartes	Nombre de symboles
1	1	1
2	3	3
3	7	7
8	57	57

Nous avons conjecturé que :

Le nombre minimum de symboles différents dans le jeu semble égal au nombre maximum de cartes

Ce nombre semble donné par la formule :

Nombre d'emplacements par carte x (nombre d'emplacements par carte -1) + 1

cad **n x (n-1) + 1** = n^2-n+1

Partie 3 : Quelques démonstrations

Pour démontrer nos conjectures nos professeurs nous ont demandé de répondre à trois questions différentes :

a) Dans le jeu du Dobble, existe-t-il un même symbole porté par toutes les cartes ?

On a démontré que dans un jeu Dobble, il n'existe pas de symbole commun porté par toutes les cartes.

On note n le nombre d'emplacements par carte pour des symboles et p le nombre de cartes total dans le jeu.

Si on suppose qu'il existe un même symbole porté par toutes les cartes et noté S1 alors il y a n-1 autres symboles différents sur chaque carte. Chacun de ces (n-1) autres symboles ne peuvent pas être présents sur d'autres cartes (car S1 sera le seul symbole commun entre deux cartes).

On a donc pour ce jeu Dobble **(n-1) x p** symboles en plus de S1. Par conséquent il y a **(n-1) x p+1** symboles différents dans le jeu.

Pour huit emplacements par carte comme dans le jeu commercialisé du Dobble, cela représenterait 386 symboles différents : ce qui est énorme !

De plus le jeu serait sans intérêt car ce serait tout le temps le même symbole commun qui apparaîtrait ce qui reviendrait à avoir un jeu à un symbole différent par carte. (2)

b) Dans le cas où il y a 3 emplacements par carte, un même symbole S peut-il être présent sur cinq cartes différentes ?

Pour trois emplacements par carte si l'on a cinq fois le même symbole S sur cinq cartes différentes alors la sixième devra comporter un symbole en commun avec les cinq autres cartes différent du symbole S. Or il faudrait cinq emplacements sur cette sixième carte pour avoir au moins un symbole en commun avec les cinq premières. Cette hypothèse est fausse.

Ce qui nous mène à nous pencher sur la question suivante :

c) Dans le cas où il y a n emplacements par carte, sur combien de cartes différentes au maximum, un même symbole S peut-il être présent ?

Si on observe un symbole S sur un certain nombre q de cartes, ces q cartes ne doivent avoir entre elles qu'un seul symbole en commun qui est donc S. Cela signifie qu'il y a (n-1) autres symboles sur chacune des q cartes soit q(n-1) autres symboles.

D'après le paragraphe a), on sait qu'il existe une carte C dans le jeu qui ne porte pas le symbole S.

Cette carte C doit avoir un unique symbole commun avec les q cartes mentionnées précédemment, choisi parmi les paquets de (n-1) symboles présents sur chacune. Cela signifie qu'elle doit porter au moins q symboles différents. Comme la carte C a n emplacements pour les symboles, on en déduit que $q \leq n$.

d) Nombre maximum de cartes dans un jeu Dobble

Les résultats précédents nous permettent de démontrer notre conjecture concernant le nombre maximum de cartes. En effet :

Dans le cas où il y a n emplacements sur les cartes, on pioche une carte C qui présente les symboles notés S1, S2 … Sn. On note q_1, q_2 … q_n le nombre de cartes dans le jeu possédant chacun de ces symboles.
On sait donc que :

$$\left.\begin{array}{l} q_1\text{-1 cartes différentes de C portent le symbole S1} \\ q_2\text{-1 cartes différentes de C portent le symbole S2} \\ \dots \\ q_n\text{-1 cartes différentes de C portent le symbole Sn} \end{array}\right\}$$

Toutes ces cartes sont différentes sinon elles auraient deux symboles en commun avec C

On ajoute ces lignes.

On obtient $(q_1-1)+(q_2-1)+\dots(q_n-1)$ cartes différentes cad $(q_1+q_2+\dots+q_n)-n$ cartes différentes qui ont un symbole en commun avec C.

On sait d'après le paragraphe précédent que $q_1 \leq n$; $q_2 \leq n$; … ; $q_n \leq n$.

On en déduit que $(q_1+q_2+\dots+q_n) \leq n\times n$ et $(q_1+q_2+\dots+q_n) - n \leq n\times n - n$.

Ainsi dans le jeu, le nombre de cartes qui ont un symbole en commun avec C est tel inférieur à $n\times n - n$.

Le nombre de cartes total est donc inférieur à $n \times n - n + 1$ (en comptant C)

On a démontré que dans un jeu Dobble, lorsque chaque carte porte n emplacements pour des symboles alors le nombre maximum de cartes différentes est $n\times n - n+1 = n(n-1)+1$

Ce qui démontre notre conjecture et dans le cas du Dobble vendu dans le commerce, on a n=8 donc le nombre de cartes maximum que pourrait contenir le jeu est $8\times7+1=57$ cartes. Le jeu vendu n'en contient que 55 il n'est donc pas optimal, peut-être que le nombre de cartes a été choisi pour faciliter la distribution des cartes…

e) Nombre minimum de symboles différents dans un jeu Dobble

On a conjecturé que le nombre minimum de symboles différents dans le jeu semble égal au nombre maximum de cartes. Nous n'avons pas encore démontré cette conjecture. Nous essaierons de le faire plus tard.

Partie 4: Des outils pour construire un jeu Dobble

Maintenant que l'on connait le nombre de symboles différents minimum et le nombre maximum de cartes que l'on doit avoir pour optimiser un jeu Dobble, on peut se demander **comment distribuer les symboles sur les cartes** pour créer un tel jeu.

a) A l'aide d'un tableau à double entrée

Pour étudier la distribution des symboles sur les cartes, on a d'abord travaillé sur des cas simples :

Cas n=2

On se place d'abord dans le cas où les cartes portent 2 emplacements pour des symboles. On sait que pour optimiser le jeu, il nous faut alors $2\times1+1=3$ symboles différents et 3 cartes.

On peut noter S1, S2 et S3 les symboles et C1, C2 et C3 les cartes.

Voici un tableau à double entrée. Chaque colonne correspond à un symbole, chaque ligne à une carte et une croix dans le tableau indique que le symbole se trouve sur la carte.

Une distribution possible des symboles est :

	S_1	S_2	S_3
C1	X		X
C2		X	X
C3	X	X	

Cas n=3

On se place maintenant dans le cas où les cartes portent 3 emplacements pour des symboles. On sait que pour optimiser le jeu, il nous faut alors $3 \times 2+1=7$ symboles différents et 7 cartes.

Une distribution possible des symboles est :

(Une case foncée signifie qu'un symbole appartient à une carte)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_1	■	■	■				
C_2	■			■	■		
C_3	■					■	■
C_4		■		■		■	
C_5		■			■		■
C_6			■	■			■
C_7			■		■	■	

Cas n>3

Nous avons ensuite cherché un algorithme pour créer la distribution des symboles sur les cartes dans le cas général de n emplacements par carte et donc $n(n-1)+1$ symboles et cartes.

Nous avons d'abord cherché à écrire cet algorithme en langage naturel dans le cas où n=4 (13 symboles et 13 cartes) pour essayer de la généraliser.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13		
1	X	X	X	X											
2	X				X	X	X								
3	X							X	X	X					
4	X										X	X	X		
5		X			X			X			X				
6		X				X			X			X			
7		X					X			X			X		
8			X		X				X				X		Décalage du groupe 2 de 1 case vers la droite
9			X			X				X	X				
10			X				X	X				X			
11				X	X					X		X			Décalage du groupe de 1 case vers la gauche
12				X		X		X					X		
13				X			X		X		X				
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		

Nous avons écrit l'algorithme qui suit sous Python mais malheureusement, celui-ci ne fonctionne que pour des valeurs particulières de n qui sont 1, 2, 3 et 5 emplacements par carte.

```python
# -*- coding: utf8 -*-

#---INITIALISATION GLOBALE---

n = int(input("Quel est le nombre de symboles par cartes ? : ")) # n étant le nombre de Symbole par carte
nbDeCartes = n*(n-1)+1 # On applique la formule
nbDeSymboles = nbDeCartes # On sait que le nombre de symbole est égal au nombre de cartes

grille = [[0 for i in range(nbDeSymboles)]for i in range(nbDeCartes)] # On initialise la grille en la remplissant de 0 (décocher)

#----FONCTIONS----
def Test():
    a=0
    for i in range(nbDeCartes) : # On regarde s'il existe une carte ayant ce symbole en commun
        for j in range(nbDeSymboles):
            if SommeDeLigne(i) != n :
                a = 1
            if SommeDeCollone(j) != n :
                a = 1
    return a

def ecrireGrille():
    fichier = open("tableau.txt","w")
    for i in range(nbDeCartes) : fichier.write(str(grille[i])+"\n")
    fichier.close()

def afficherGrille() :
    for i in range(nbDeCartes) : print grille[i]
    # On affiche la grille ligne par ligne pour que ce soit plus lisible

def SommeDeLigne(ligne) :
    Somme = 0
    for i in range(nbDeSymboles) :
        if grille[ligne][i] == 1:
            Somme += 1
    return Somme
    # On fait la somme de tous les 1 de la ligne
```

En effet, pour un nombre n>5, nous nous sommes rendu compte que le « remplissage » du tableau à double entrée devenait très complexe et nous ne sommes pas parvenus à établir une stratégie que l'on pourrait appliquer systématiquement.

M.Chardard nous a alors proposé un autre outil de type géométrique.

b) A l'aide de points et droites dans un repère

M.Chardard nous a expliqué son idée en faisant un rapprochement entre notre étude et la géométrie. Dans le jeu Dobble, on sait que deux cartes du jeu possèdent toujours un et un seul symbole commun, cette règle peut faire penser à celle qui s'applique en géométrie, deux droites non parallèles ont un et un seul point d'intersection.

L'idée serait alors de représenter dans un repère les symboles du jeu par des points et les cartes par des droites. Ensuite, un point qui appartient à une droite signifiera que le symbole est porté par la carte.

Nous avons commencé à travailler avec des valeurs particulières de n

Cas où n=3

Dans le cas où chaque carte possède 3 emplacements, le jeu est optimal avec $3\times2+1=7$ symboles différents et 7 cartes. A la fin de la construction il nous faudra donc 7 droites passant chacune par trois points et 7 points différents.

- Pour commencer on utilise une grille de $2\times2=4$ symboles qu'il faudra enrichir ensuite de 3 symboles.

Chaque point noté 1 ; 2 ; 3 et 4 de la grille représente un symbole (*fig1*)

- On trace des droites passant par ces points pour représenter les cartes possibles du jeu en commençant par les droites « horizontales » et « verticales » possibles .(*Fig 2*)

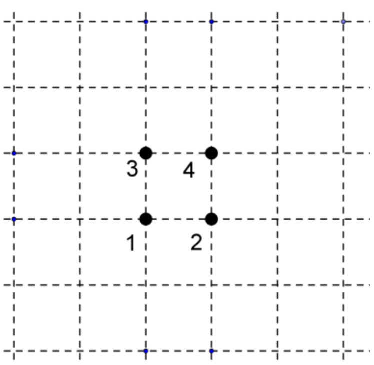


fig1

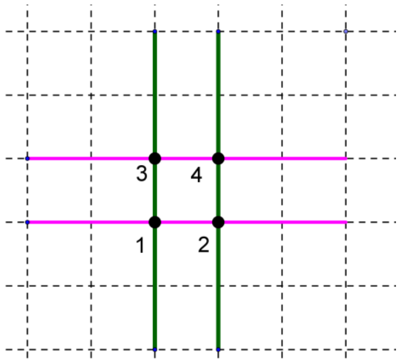


fig2

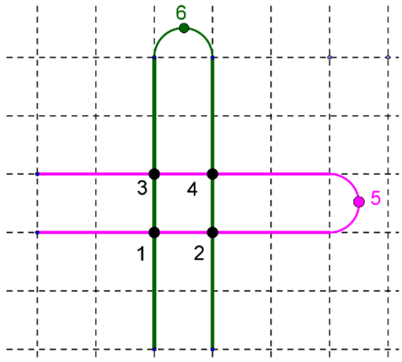


fig 3

- Les droites (1 ;2) et (3 ;4) doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et note 5. Les droites (1 ;3) et (2 ;4) doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et note 6. (*fig 3*)

- On construit ensuite des droites obliques de coefficient directeur 1

(dans le repère défini par les trois premiers points 1 ;2 et 3).

La droite (1 ;4) se trace facilement et ensuite sa parallèle passant par 2 (ou 3) doit passer par un autre point que l'on obtient en reportant la grille (1 ;2 ;3 ;4) vers la droite et vers le haut.
(*Fig 4*)

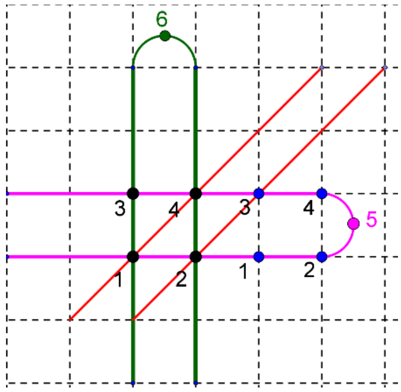


fig 4

- Les droites (1 ;4) et (2 ;3) doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et note 7. (*Fig 5*)

Cette construction permet de distribuer les 7 symboles sur six cartes comme ceci :

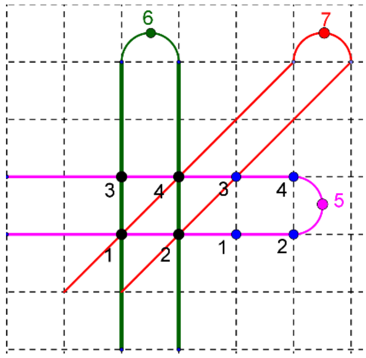


fig 5

<u>Carte 1</u> : 1 ; 2 ; 5

<u>Carte 2</u> : 3 ; 4 ; 5

<u>Carte 3</u> : 1 ; 3 ; 6

<u>Carte 4</u> : 2 ; 4 ; 6

<u>Carte 5</u> : 1 ; 4 ; 7

<u>Carte 6</u> : 2 ; 3 ; 7

Il manque une carte pour compléter le jeu que l'on obtient en utilisant les trois symboles crées pendant la construction :

<u>Carte 7</u> : 5 ; 6 ; 7

Cas où n=4

Dans le cas où chaque carte possède 4 emplacements, le jeu est optimal avec $4 \times 3+1=13$ symboles différents et 13 cartes. A la fin de la construction il nous faudra donc 13 droites passant chacune par 4 points et 13 points différents.

- Pour commencer on utilise une grille de $3 \times 3=9$ symboles qu'il faudra enrichir ensuite de 4 symboles.

Chaque point noté 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ;7 ;8 et 9 de la grille représente un symbole .

- On trace des droites passant par ces points pour représenter les cartes possibles du jeu en commençant par les droites « horizontales » et « verticales » possibles .

- Les droites (1 ;2 ;3) ; (4 ; 5 ; 6) et (7 ; 8 ; 9) doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et note 10.
  Les droites (1 ; 4 ; 7) ;(2 ; 5 ; 8) et (3 ; 6 ; 9) doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et note 11.
  (*fig 1*)

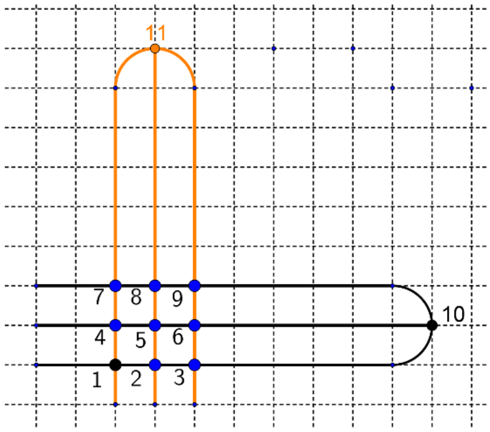


fig 1

- On construit ensuite des droites obliques de coefficient directeur 1 (dans le repère défini par les points 1 ;2 ; 4).
  On obtient les points manquants en reportant la grille (1 ;2 ;… ;9) vers la droite et vers le haut.
  Les trois droites crées doivent avoir un point de concours que l'on crée et note 12(*fig 2*).

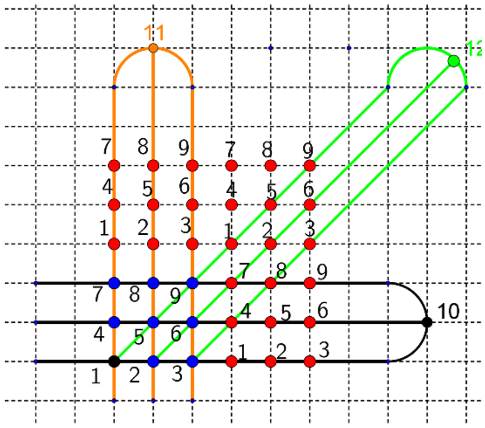


fig 2

- On construit ensuite des droites obliques de coefficient directeur 2 (dans le même repère). Les trois droites crées doivent avoir un point de concours que l'on crée et note 13(*Fig 2*).

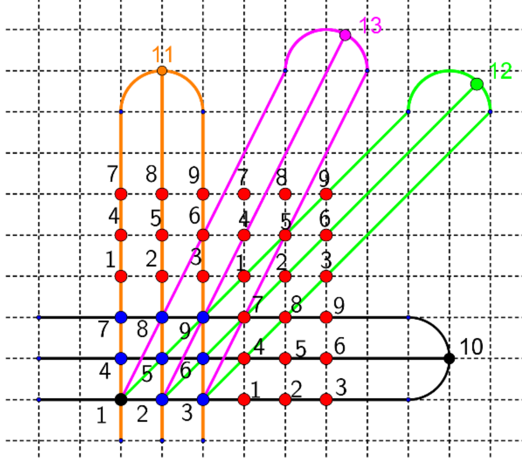


fig 3

Cette construction permet de distribuer les 13 symboles sur 12 cartes comme ceci :

Carte 1 : 1 ; 2 ; 3 ; 10
Carte 2 : 4 ; 5 ; 6 ; 10

Carte 3 : 7 ; 8 ; 9 ; 10

Carte 4 : 1 ;4 ;7 ;11

Carte 5 : 2 ;5 ;8 ;11

Carte 6 : 3 ;6 ;9 ;11

Carte 7 : 1 ;5 ;9 ;12

Carte 8 : 2 ;6 ;7 ;12

Carte 9 : 3 ;4 ;8 ;12

Carte 10 : 1 ;8 ;6 ;13

Carte 11 : 2 ;9 ;4 ;13

Carte 12 : 3 ;7 ;5 ;13

Il manque une carte pour compléter le jeu que l'on obtient en utilisant les quatre symboles créés pendant la construction :

Carte 13 : 10 ; 11 ; 12 ;13

Remarque : Notre algorithme de construction a été trouvé par tâtonnement, il nous permet de trouver une distribution possible des symboles sur les cartes car on peut vérifier que chaque duo de carte n'a qu'un seul symbole en commun.

Cas où n>4

A l'aide du travail précédent, on a généralisé notre algorithme de construction dans le cas où chaque carte possède n (n>4) emplacements pour des symboles. Le jeu est optimal avec $n\times(n-1)+1$ symboles différents et $n\times(n-1)+1$ cartes. A la fin de la construction il nous faudra donc $n\times(n-1)+1$ droites passant chacune par n points et $n\times(n-1)+1$ points différents.

- Pour commencer on utilise une grille de $(n-1)\times(n-1)$ symboles qu'il faudra enrichir ensuite

de n +1 symboles.

Chaque point noté 1 ; 2 ; … et $(n-1)\times(n-1)$ de la grille représente un symbole .

- On trace des droites passant par ces points pour représenter les cartes possibles du jeu en commençant par les (n-1) droites « horizontales » et (n-1) droites « verticales » possibles.

- Les droites horizontales doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et

note $(n-1)\times(n-1)+1$.

Les droites verticales doivent avoir un et un seul symbole en commun que l'on crée et

note $(n-1)\times(n-1)+2$.

- On construit ensuite des droites obliques de coefficient directeur 1.
On obtient les points manquants en reportant la grille (1 ;2 ;… ;(n-1)(n-1)) vers la droite et vers le haut. Les (n-1) droites créées doivent avoir un point de concours que l'on crée et
note $(n-1)\times(n-1)+3$.

On construit ensuite des droites obliques de coefficient directeur 2 ; puis 3 ; … puis n-1 (dans le même repère). A chaque fois les (n-1) droites crées doivent avoir un point de concours que l'on crée et note $(n-1)\times(n-1)+4$;… ; $(n-1)\times(n-1)+n$.

Cette construction permet de distribuer les $n(n-1)+1$ symboles sur $n(n-1)$ cartes.

- Il manque une carte pour compléter le jeu que l'on obtient en utilisant les n symboles crées pendant la construction.

Nous pouvons désormais créer un jeu Dobble optimal, quel que soit le nombre d'emplacements n choisi sur les cartes pour des symboles.

Conclusion :

Notre participation à l'atelier Math.en.Jeans nous a permis de mener des recherches de façon autonome entre élèves, ponctuées par des validations de M. Chardard ou de nos professeurs. Cette expérience nous a permis de travailler les mathématiques différemment et nous sommes très contents d'avoir participé à cet atelier. Nos recherches ne sont pas complètes mais se sont arrêtées avec la fin d'année scolaire.

Nous remercions M.Chardard et nos professeurs pour l'aide qu'ils nous ont apportée.

Notes d'édition

(1) Ce procédé de création de carte pourrait être reproduit à l'infini, le symbole S1 étant commun à toutes les cartes et tous les autres symboles étant tous différents deux à deux. Pour éliminer cette possibilité, il faudrait ajouter la contrainte « pour chaque symbole, il doit exister une carte au moins qui ne le porte pas » ou « chaque symbole doit être présent sur au moins deux cartes du jeu ».

(2)Voir note #1 pour justifier l'élimination du cas où un même symbole est porté par toutes les cartes.