Divisons 1 par un nombre entier : après la virgule, que se passe-t-il ?

Léa BETOURNE, Magalie BOYER, Eléonore CHANOT, Marie RABITA

élèves de 4ème, Collège Jean Mermoz à MARLY (57)
Enseignantes : BAPTISTE Dominique, PALLEZ Valérie, SAPENA Ghislaine
Chercheur : DUBOIS Isabelle

Sujet

Effectuons la division de 1 par un entier naturel. Par exemple :

```
1/3 = 0,333333...
1/4 = 0,25
1/7 = 0,142857142857...
```

Observations. Quels phénomènes observe-t-on concernant les chiffres «après la virgule» ?

Explications. Peut-on comprendre et prévoir les phénomènes observés ?

Mots-clés

DIVISION, INVERSE, NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE RATIONNEL, PÉRIODE, DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

Après avoir lu le sujet, nous avons décidé de nous partager le travail. Léa a étudié les divisions de 1 par un multiple de 2, Marie celles de 1 par un multiple de 3, Eléonore celles de 1 par un multiple de 5 et Magali celles de 1 par un multiple de 7 ou de 11. Nos premières recherches nous ont permis d'observer quelques phénomènes.

1) Observations

a) division de 1 par un nombre entier multiple de 2 (contribution de Léa)

Certains quotients obtenus sont des nombres décimaux :

1/2 = 0,5	1/4 = 0,25	1/8 = 0,125
1/10 = 0,1	1/16 = 0,0625	1/20 = 0,05
1/32 = 0,03125	1/40 = 0,025	1/50 = 0,02

Mais d'autres ne le sont pas :

1/6 = 0,166666666…	1/12 = 0,083333333…
1/14 = 0,071428571…	1/18 = 0,055555555…
1/22 = 0,045454545…	1/24 = 0,041666666…

b) division de 1 par un nombre entier multiple de 3 (Marie)

1/3 = 0,333333... . On observe qu'après la virgule il n'y a que des 3 indéfiniment. On retrouve ce phénomène dans plusieurs exemples :

1/6= 0,16666666…	1/9 = 0,111111111…
1/12=0,083333333…	1/15=0,066666666…

Ce phénomène apparaît dans la division de 1 *par un multiple de* 3 : 6 ; 9 ; 12 ; 15; 18 …

c) division de 1 par un multiple de 5 (Eléonore)

On observe que le quotient obtenu peut être un nombre décimal :

1/ 5 = 0,2	1/10 = 0,1	1/20 = 0,05
1/25 = 0,04	1/40 = 0,025	1/50 = 0,02

Mais pour d'autres nombres entiers multiples de 5, le quotient n'est pas un nombre décimal :

1/15 = 0,0666…	1/35 = 0,0285714…
1/30 = 0,0333…	1/55 = 0,0181818…

d) division de 1 par un multiple de 7 (Magali)

Quand on divise 1 par 7, on observe l'apparition d'une période. 1/7 = 0,**142857**142857...

C'est le cas également dans la division de 1 par un multiple de 7 : 14 ; 21 ; 28 ; 35 …

1/14 = 0,0**714285**7142857…
1/21 = 0,**047619**047619…
1/28 = 0,03**571428**571428…
1/35 = 0,0**285714**28571428 …

e) division de 1 par un multiple de 11 (Magali)

Quand on divise 1 par 11, une période apparaît :
1/11= 0,**09**090909…

C'est le cas également dans la division de 1 *par un multiple de* 11 :

1/22 = 0,0**45**454545…	1/33 = 0,**03**03030303…
1/44 = 0,02**27**272727…	1/55 = 0,0**18**1818181…
1/66 = 0,0**15**151515…	1/77 = 0,0**129870**129…
1/88 = 0,011**36**3636…	1/99 = 0,0**10**1010101…

Nous avons résumé dans un tableau les résultats obtenus. Nous l'avons ensuite complété pour avoir les divisions de 1 par n pour n allant de 1 à 50. Nous avons également cherché les longueurs des périodes qui apparaissaient. Ces périodes sont soulignées dans le tableau qui suit.

L désigne la longueur de la période qui apparaît.

n	$1/n$	L
1	1	
2	0,5	
3	0,3333333333333333333333333333	1
4	0,25	
5	0,2	
6	0,1**6**666666666666666666666666666	1
7	0,**142857**1428571428571428571428	6
8	0,125	
9	0,**1**111111111111111111111111	1
10	0,1	
11	0,**09**09090909090909090909090909	2
12	0,08**3**3333333333333333333333333	1
13	0,0**769230**769230769230769230769	6
14	0,0**714285**714285714285714285714	6
15	0,0**6**66666666666666666666666666	1
16	0,0625	
17	0,**0588235294117647**058823529411	16
18	0,0**5**55555555555555555555555555	1
19	0,**052631578947368421**0526315789	18
20	0,05	
21	0,**047619**0476190476190476190476	6
22	0,0**45**4545454545454545454545454	2
23	0,**0434782608695652173913**043478	22
24	0,041**6**666666666666666666666666	1
25	0,04	
26	0,0**384615**384615384615384615384	6
27	0,**037**0370370370370370370370370	3
28	0,03**571428**57142857142857142857	6
29	0,**0344827586206896551724137931**	28
30	0,0**3**33333333333333333333333333	1
31	0,**032258064516129**0322580645161	15
32	0,03125	
33	0,**03**03030303030303030303030303	2
34	0,0**2941176470588235**29411764705	16
35	0,0**285714**285714285714285714285	6
36	0,02**7**7777777777777777777777777	1
37	0,**027**0270270270270270270270270	3
38	0,0**263157894736842105**263157894	18
39	0,**025641**0256410256410256410256	6
40	0,025	
41	0,**02439**02439024390243902439024	5
42	0,0**238095**238095238095238095238	6
43	0,**023255813953488372093**0232558	21
44	0,02**27**272727272727272727272727	2
45	0,0**2**22222222222222222222222222	1
46	0,0**2173913043478260869565**21739	22
47	0,0212765957446808510638297872	?
48	0,0208**3**33333333333333333333333	1
49	0,0204081632653061224489795918	?
50	0,02	

Deux divisions nous ont posé problème : celle de 1 par 47 et celle de 1 par 49 car aucune période n'apparait dans le tableau.

Après avoir fait toutes ces observations, nous avons essayé de comprendre pourquoi ces phénomènes apparaissaient et nous avons approfondi nos recherches pour ces deux divisions.

2) Explications

a) division de 1 par un nombre entier multiple de 2

Nous avons découvert que parmi les nombres n tel que $1/n$ est un nombre décimal :

- certains sont des multiples de 2 :
  2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 32 ; 40 ; 50
- certains sont des multiples de 5 :
  5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50
- certains sont des multiples de 2 et de 5 :
  10 ; 20 ; 40 ; 50

Notre chercheur nous a demandé de trouver un critère sur le nombre n. Nous avons donc cherché des relations entre ces nombres :

$2 \quad 4 = 2^2 \quad 8 = 2^3 \quad 16 = 2^4 \quad 32 = 2^5$

$5 \quad 10=2\times5 \quad 20=2^2\times5 \quad 40=2^3\times5 \quad 80=2^4\times5$

$25=5^2 \quad 50=5^2\times2$

Nous avons fait la **conjecture** suivante : *Si n est un entier naturel de la forme* 2^k *ou* 5^k *ou* $2^k\times5^{k'}$ *alors* $1/n$ *est un nombre décimal.*

Nous avons cherché à comprendre pourquoi dans ce cas la division donnait un nombre décimal.

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times2}=\frac{1\times5\times5}{2\times5\times2\times5}=\frac{25}{100}=0{,}25$$

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{5\times5}=\frac{1\times2\times2}{5\times2\times5\times2}=\frac{4}{100}=0{,}04$$

$$\frac{1}{250}=\frac{1}{5\times5\times5\times2}=\frac{1\times2\times2}{5\times2\times5\times2\times5\times2}=\frac{4}{1000}=0{,}004$$

Lorsqu'un 2 apparait au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par 5. Lorsqu'un 5 apparait au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par 2. Ainsi, le dénominateur se décompose en multiples de 10, le quotient est alors un nombre décimal.

Notre chercheur nous a demandé si la réciproque était vraie. Nous avons manqué de temps pour pouvoir répondre à cette question mais nous avons travaillé sur quelques exemples qui nous permettent de penser que la réciproque doit être vraie.

$\frac{1}{64}=0{,}015625$ et 64 peut s'écrire sous la forme :

$64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6$

$\frac{1}{80} = 0{,}0125$ et 80 peut s'écrire sous la forme :

$80 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 2^4$

$\frac{1}{125} = 0{,}008$ et 125 peut s'écrire sous la forme :

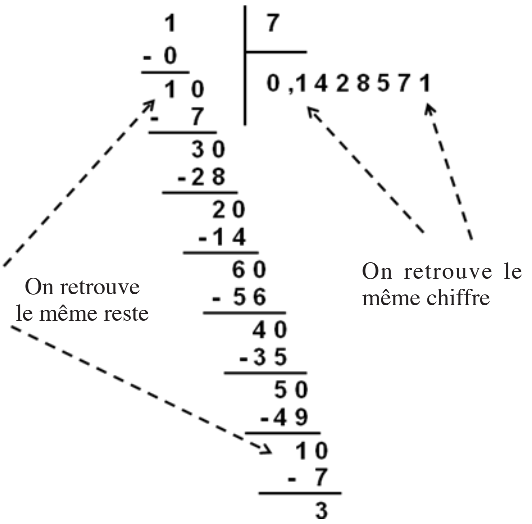
$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

On observe que dans ces trois cas, le dénominateur peut s'écrire sous la forme 2^k ou 5^k ou $2^k \times 5^{k'}$.

b) division de 1 par un nombre entier multiple de 7

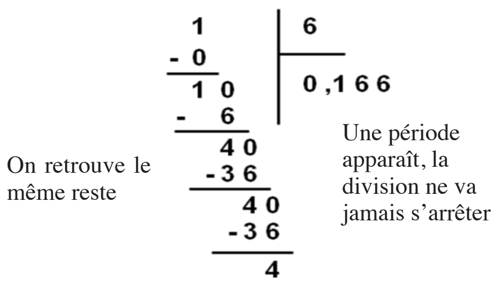
Nous avons essayé de comprendre pourquoi une période apparaissait. Nous avons donc effectué quelques divisions à la main :

Exemple : division de 1 par 7



Pour chaque étape, le reste doit être inférieur au diviseur, en l'occurrence ici 7. Comme la division ne s'arrête pas, ce reste ne sera pas 0. Il peut donc être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Pour cette division, après quelques étapes, on retrouve le même reste 1. On va donc retrouver le même chiffre au quotient et la division ne va jamais s'arrêter. On peut remarquer aussi que la période va apparaitre avant la 7ème étape de la division.

Exemple : division de 1 par 6



Ici le reste ne pourra être que de 1, 2, 3, 4 ou 5.

On y retrouve le même phénomène, c'est-à-dire que le reste se répète : la division ne s'arrêtera donc jamais. Dans ce cas, la période apparait avant la 6ème étape de la division.

c) Divisions de 1 par 47 et de 1 par 49

Les divisions de 1 par 47 et de 1 par 49 nous ont posé problème car nous n'observions pas de période. On se disait qu'il y avait certainement une période mais que nous n'avions pas assez de décimales au quotient pour l'observer dans notre tableau. Pour le vérifier, Marie a alors effectué les divisions à la main. Voilà ce qu'elle a obtenu :

1/49=

0,**0204081632652448979591836734693877551**0204...

Nous avons observé une période qui comprend 37 chiffres, qui apparait avant la 49ème étape de la division.

1/47 = 0,**0212765957446808510638297872340425531 914893617**02127659574468085106

Nous avons observé une période qui comprend 46 chiffres, qui apparait avant la 47ème étape de la division.

Ces deux divisions sont très longues à effectuer à la main (elles tiennent sur deux pages !!!). Pour les vérifier notre professeur nous a conseillé d'utiliser le tableur. Nous avons programmé la division de 1 par un nombre entier en utilisant les fonctions ENT et MOD.

	A	B	C
1		n	47
2	quotient	reste	
3	0	1	
4	0	10	
5	2	6	
6	1	13	
7	2	36	
8	7	31	
9	6	28	
10	5	45	
11	9	27	

Dans la cellule A3 :
=ENT(1/C1)
Dans la cellule B3 :
=MOD(1;C1)
Dans la cellule A4 :
=ENT(B3*10/C1)
Dans la cellule B4 :
=MOD(B3*10;C1)

Nous avons alors pu vérifier les divisions que Marie avait effectuées à la main. Cela nous a permis d'observer qu'elle avait fait une erreur dans la division de 1 par 49 en oubliant quelques chiffres ... [la période est en fait de longueur 42]

3) Conclusion

Quand on divise 1 par un nombre entier n, nous avons découvert qu'on obtient : un nombre décimal, ou : un nombre non décimal.

Si le nombre obtenu est un nombre décimal, nous avons observé que n peut s'écrire sous la forme 2^k ou 5^k ou $2^k \times 5^{k'}$.

Si le nombre obtenu n'est pas un nombre décimal, nous avons remarqué que, dans l'écriture du quotient, apparait une période plus ou moins longue avant la $n^{\text{ième}}$ étape de la division.

Au fur et à mesure que nous avancions dans nos recherches, nous avons compris les différents phénomènes observés.

***

1/47=0,02127659574468085106382978723404255319148936170
21276595744680851063829787234042553191489361702127659

1/48=0,02083333333333333333333333333333333333333333333
33333333333333333333333333333333333333333333333333333

1/49=0,02040816326530612244897959183673469387755102040
81632653061224489795918367346938775510204081632653061

1/50 = 0,02

1/51=0,01960784313725490196078431372549019607843137254
90196078431372549019607843137254901960784313725490196

1/52=0,01923076923076923076923076923076923076923076923
07692307692307692307692307692307692307692307692307692

1/53=0,01886792452830188679245283018867924528301886792
45283018867924528301886792452830188679245283018867924

1/54=0,01851851851851851851851851851851851851851851851
85185185185185185185185185185185185185185185185185185

1/55=0,01818181818181818181818181818181818181818181818
18181818181818181818181818181818181818181818181818181

1/56=0,01785714285714285714285714285714285714285714285
71428571428571428571428571428571428571428571428571428

1/57=0,01754385964912280701754385964912280701754385964
91228070175438596491228070175438596491228070175438596

1/58=0,01724137931034482758620689655172413793103448275
86206896551724137931034482758620689655172413793103448

1/59=0,01694915254237288135593220338983050847457627118
64406779661016949152542372881355932203389830508474576

1/60=0,01666666666666666666666666666666666666666666666
66666666666666666666666666666666666666666666666666666

1/61=0,01639344262295081967213114754098360655737704918
03278688524590163934426229508196721311475409836065573

1/62=0,01612903225806451612903225806451612903225806451
61290322580645161290322580645161290322580645161290322

1/63=0,01587301587301587301587301587301587301587301587
30158730158730158730158730158730158730158730158730158

1/64 = 0,015625

1/65=0,01538461538461538461538461538461538461538461538
46153846153846153846153846153846153846153846153846153

1/66=0,01515151515151515151515151515151515151515151515
15151515151515151515151515151515151515151515151515151

1/67=0,01492537313432835820895522388059701492537313432
83582089552238805970149253731343283582089552238805970

1/68=0,01470588235294117647058823529411764705882352941
17647058823529411764705882352941176470588235294117647

1/69=0,01449275362318840579710144927536231884057971014
49275362318840579710144927536231884057971014492753623

1/70=0,01428571428571428571428571428571428571428571428
57142857142857142857142857142857142857142857142857142

1/71=0,01408450704225352112676056338028169014084507042
25352112676056338028169014084507042253521126760563380

1/72=0,01388888888888888888888888888888888888888888888
88888888888888888888888888888888888888888888888888888

1/73=0,01369863013698630136986301369863013698630136986
30136986301369863013698630136986301369863013698630137

1/74=0,01351351351351351351351351351351351351351351351
35135135135135135135135135135135135135135135135135135

1/75=0,01333333333333333333333333333333333333333333333
33333333333333333333333333333333333333333333333333333

1/76=0,01315789473684210526315789473684210526315789473
68421052631578947368421052631578947368421052631578947

1/77=0,01298701298701298701298701298701298701298701298
70129870129870129870129870129870129870129870129870129

1/78=0,01282051282051282051282051282051282051282051282
05128205128205128205128205128205128205128205128205128

1/79=0,01265822784810126582278481012658227848101265822
78481012658227848101265822784810126582278481012658227

1/80 = 0,0125

1/81=0,01234567901234567901234567901234567901234567901
23456790123456790123456790123456790123456790123456790

1/82=0,01219512195121951219512195121951219512195121951
21951219512195121951219512195121951219512195121951219

1/83=0,01204819277108433734939759036144578313253012048
19277108433734939759036144578313253012048192771084337

1/84=0,01190476190476190476190476190476190476190476190
47619047619047619047619047619047619047619047619047619

1/85=0,01176470588235294117647058823529411764705882352
94117647058823529411764705882352941176470588235294117

1/86=0,01162790697674418604651162790697674418604651162
79069767441860465116279069767441860465116279069767441

1/87=0,01149425287356321839080459770114942528735632183
90804597701149425287356321839080459770114942528735632

1/88=0,01136363636363636363636363636363636363636363636
36363636363636363636363636363636363636363636363636363

1/89=0,01123595505617977528089887640449438202247191011
23595505617977528089887640449438202247191011235955056

1/90=0,01111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111

1/91=0,01098901098901098901098901098901098901098901098
90109890109890109890109890109890109890109890109890109

1/92=0,01086956521739130434782608695652173913043478260
86956521739130434782608695652173913043478260869565217

1/93=0,01075268817204301075268817204301075268817204301
07526881720430107526881720430107526881720430107526881

1/94=0,01063829787234042553191489361702127659574468085
10638297872340425531914893617021276595744680851063829

1/95=0,01052631578947368421052631578947368421052631578
94736842105263157894736842105263157894736842105263157

1/96=0,01041666666666666666666666666666666666666666666
66666666666666666666666666666666666666666666666666666

1/97=0,01030927835051546391752577319587628865979381443
29896907216494845360824742268041237113402061855670103

1/98=0,01020408163265306122448979591836734693877551020
40816326530612244897959183673469387755102040816326530

1/99=0,01010101010101010101010101010101010101010101010
10101010101010101010101010101010101010101010101010101

1/100 = 0,01