Diviser pour mieux compter

Année 2021 – 2022

Claire Harlay (classe de 2e) et Angèle Gaudin (classe de 1ère)

Établissement : Lycée Auguste Angellier, Dunkerque

Encadrées par : Denis Quenton

Chercheur, Chercheuse : Romuald Ernst, Sandrine Lagaize

1. Présentation du sujet

Dans le cadre du projet MATh.en.JEANS, nous avons décidé d'étudier le sujet « Diviser pour mieux compter ». Ce sujet consiste à étudier des fractions continues finies ou infinies d'entiers. Ces fractions sont un moyen d'écrire tous les nombres réels avec leur partie entière à laquelle on ajoute leur partie décimale sous forme de fraction. Tout nombre réel F peut alors s'écrire sous forme fractionnaire, où a_n est un nombre entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1):

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

On peut aussi écrire F sous forme plus compacte : on réécrit simplement les termes de la suite (a_n) de la manière suivante :

$$F = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$$

Exemples :

On peut calculer ces fractions avec une suite finie ou infinie de termes constants, comme $F = [1,1,1,1]$, que l'on peut aussi noter $F = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$, ou bien $F = [2,2,2,2]$, que l'on peut aussi noter $F = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$.

On peut aussi calculer ces fractions avec une suite finie ou infinie de termes quelconques, comme $F = [2,4,5]$, que l'on peut noter $F = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{5}}$. On peut alors développer :

$$F = 2 + \frac{1}{\frac{20}{5} + \frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{5}} = 2 + \frac{5}{21} = \frac{47}{21} \approx 2{,}2$$

2. Résultats

2. 1. Le cas de $F = [\bar{1}]$

On peut noter $F = [\bar{1}]$ la fraction continue, associée à une suite infinie de 1, c'est-à-dire $F = [1,1,1,\dots]$. On essaie de calculer la valeur de cette fraction, et on peut d'abord calculer les résultats de F avec des suites finies de 1. On note F_n pour tout nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de termes (ici le nombre de 1) dans la suite associée à la fraction. On a alors :

$$F_1 = [1] = 1$$

$$F_2 = [1,1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$F_3 = [1,1,1] = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$F_4 = [1,1,1,1] = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$$

On peut remarquer assez rapidement une relation entre les résultats des fractions finales : le numérateur est la somme du numérateur et du dénominateur de la fraction précédente, et le dénominateur, lui, est le numérateur de la précédente. On a par exemple :

$$F_3 = \frac{3}{2} \quad \text{puis} \quad F_4 = \frac{5}{3}\,, \quad \text{soit} \quad \frac{3+2}{3}.$$

On peut alors noter que pour $F_n = \frac{a}{b}$, $F_{n+1} = \frac{a+b}{a}$. (Voir démonstration ci-dessous).

Ici, $a = 3$ et $b = 2$.

Ici on retrouve bien le numérateur de F_3 en dénominateur de F_4.

On peut aussi remarquer une relation entre les fractions ; on peut en effet voir que le résultat d'une fraction se retrouve au dénominateur de la suivante. On a par exemple :

$$F_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$F_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

On peut alors noter de manière plus générale pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = 1 + \frac{1}{F_n}$$

Et on a :

$$F_n = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$F_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

On retrouve bien $F_n = \frac{a}{b}\ et\ F_{n+1} = \frac{a+b}{b}\ avec\ a = x+1\ et\ b = x.$

Toujours dans l'objectif de calculer la fraction infinie $F = [\bar{1}]$, on peut affirmer que $F_n = F_{n+1}$ lorsque n tend vers l'infini. En effet, on peut négliger la valeur ajoutée de F_{n+1} (2).

On obtient alors une équation de degré 2, d'inconnue x réelle non nulle :

$$x = 1 + \frac{1}{x}\ .$$

On résout, pour $x \in \mathbb{N}^*$, $x = 1 + \frac{1}{x}$:

$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

On a maintenant une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a = 1\,; b = -1\,; c = -1$

On calcule alors le discriminant afin de trouver sa ou ses solutions éventuelles, $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$\Delta = 1 - (-4) = 5$$

On remarque que $\Delta = 5$; alors l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - b}{2a} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{\Delta} - b}{2a}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}$$

On retient uniquement x_1, puisque le résultat de notre fraction $F = [\bar{1}]$ est forcément positif. En effet, la partie entière de la fraction est positive, alors sa valeur exacte doit l'être aussi.

On peut donc écrire que $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Nous avons alors remarqué que la fraction $F = [\bar{1}]$ semble être une manière d'écrire le nombre d'or, car le résultat de l'équation correspond à $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Nous pourrions alors rajouter de plus en plus de 1 dans la fraction afin de se rapprocher plus précisément de la valeur de φ. De plus, nous retrouvons la présence de la suite de Fibonacci dans cette fraction, et cela nous renvoie encore une fois au nombre d'or. En effet nous avons vu que pour $F_n = \frac{a}{b}, F_{n+1} = \frac{a+b}{a}$. Or la suite de Fibonacci reprend cette logique avec $(\boldsymbol{F}_n)$ (3) définie par $\boldsymbol{F}_0 = 0$, $\boldsymbol{F}_1 = 1$ et $\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{n-1} + \boldsymbol{F}_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Cette suite a alors pour premiers termes $\boldsymbol{F}_0 = 0$, $\boldsymbol{F}_1 = 1$, $\boldsymbol{F}_2 = 1$, $\boldsymbol{F}_3 = 2$, $\boldsymbol{F}_4 = 3$, $\boldsymbol{F}_5 = 5$, $\boldsymbol{F}_6 = 8$. On retrouve ces termes avec notre fraction :

$$F_1 = \frac{1}{1}$$

$$F_2 = \frac{2}{1}$$

$$F_3 = \frac{3}{2}$$

$$F_4 = \frac{5}{3}$$

2. 2. Le cas général de $F = [\overline{a}]$

Après avoir traité le cas de la fraction $F = [\overline{1}]$, nous avons décidé de nous intéresser à d'autres cas de fractions de termes constants. Nous avons alors essayé de calculer $F = [\overline{2}]$:

$$F_1 = 2$$

$$F_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$F_3 = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

$$F_4 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{29}{12} \approx 2{,}42$$

On a aussi essayé avec $F = [\overline{3}]\ et\ F = [\overline{4}]$:

$$F_1 = 3$$

$$F_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

$$F_3 = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3}} = \frac{33}{10} = 3{,}3$$

$$F_4 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{109}{33} \approx 3{,}3$$

$$F_1 = 4$$

$$F_2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

$$F_3 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = \frac{72}{17} \approx 4{,}24$$

$$F_4 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{305}{72} \approx 4{,}24$$

On a aussi remarqué dans ces cas que les résultats se précisaient et s'approchaient d'une limite, nous avons donc cherché une formule applicable pour toutes fractions F à termes constant a.

On a alors : $F = [\overline{a}]$, et on peut reprendre l'équation de degré 2 que nous avons vue précédemment :

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Ici, on va remplacer 1 par a, un terme constant, afin de trouver la formule générale.

On reprend le même procédé :

$$x = a + \frac{1}{x}$$

$$x - a = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - ax = 1$$

$$x^2 - ax - 1 = 0$$

On calcule le discriminant, avec $a = 1$, $b = -a$ et $c = -1$ (4):

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$\Delta = a^2 - (-4)$$

$\Delta = a^2 + 4 \geq 5 > 0$; alors on calcule les deux solutions :

$$x_1 = \frac{\sqrt{a^2+4} - (-a)}{2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{a^2+4} - (-a)}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{a^2+4} + a}{2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{a^2+4} + a}{2}$$

Encore une fois on retient uniquement la solution positive, et on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n\to\infty} a + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{a^2+4} + a}{2}$$

Nous pouvons appliquer cette formule avec quelques exemples :

Avec $F = [\overline{1}]$:

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{1^2+4} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

On retrouve bien le résultat que nous avions calculé plus tôt $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

On peut alors calculer $F = [\overline{2}]$, $F = [\overline{3}]$, $F = [\overline{4}]$:

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{2^2+4} + 2}{2} = \frac{\sqrt{8}+2}{2} \qquad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{3^2+4} + 3}{2} = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{4^2+4} + 4}{2} = \frac{\sqrt{20}+4}{2}$$

2. 3. Ecriture de nombres réels

Après avoir cherché la valeur de certaines fractions longues, nous avons essayé d’écrire des nombres réels sous la forme de fraction longue. On s’est principalement intéressé aux racines carrées.

On peut d’abord prendre l’exemple de $\sqrt{5}$. Ici, $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, alors, $2 < \sqrt{5} < 3$, et on peut isoler la partie entière de $\sqrt{5}$, qui est 2 (6). On peut alors écrire :

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2)$$

On utilise l’inverse afin de retrouver une forme de fraction longue, et alors :

$$\sqrt{5} = 2 + \left(\sqrt{5} - 2\right) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{5}-2)}}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\frac{(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\frac{(\sqrt{5}+2)}{5-4}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+2}{1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

Alors on peut développer cette fraction à l'infini avec :

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{2+2+\frac{1}{2+2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}$$

Ainsi, $\sqrt{5}$ peut être représenté par la fraction longue $F = [2, \overline{4}] = \sqrt{5}$.

On peut aussi chercher la fraction longue de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

Ici, $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$.

3. Conclusion

Nous avons vu que les fractions longues représentent un outil permettant d'écrire des nombres réels, en étant plus précis. On peut conjecturer que tous les nombres réels peuvent être écrits sous la forme d'une fraction longue.

Nous nous sommes penchées plus particulièrement sur le cas de $F = [\overline{1}]$, et nous avons trouvé que $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$. Nous avons ainsi évoqué le lien entre cette fraction et le nombre d'or et la suite de Fibonacci, que l'on retrouve avec $F_n = \frac{a}{b}\ et\ F_{n+1} = \frac{a+b}{a}$.

Nous avons aussi trouvé une formule générale qui nous permet de calculer la limite de chaque fraction longue, constituée de termes constants a, avec :
$\lim_{n\to\infty} a + \frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2}$.
On a aussi vu que $F_{n+1} = a + \frac{1}{F_n}$, pour a un terme constant.

Enfin, nous avons montré avec quelques exemples une méthode pour écrire des racines carrées sous forme de fractions continues.

Nous avons adoré travailler autour de ce sujet, et participer à MATh.en.JEANS, qui a été une très belle expérience. Merci aux chercheurs M. Ernst et Mme Lagaize, et à notre professeur de mathématiques M. Quenton de nous avoir encadrées cette année.

Notes d'édition

(1) Cela n'est pas démontré dans l'article, et dans la conclusion cela est présenté seulement comme une conjecture, mais il est expliqué au §2.3 comment construire ce développement en fraction continue.
Il est aussi admis aussi dans la suite de l'article que les fractions continues étudiées correspondent bien à des nombres réels.

(2) Dans la suite, le résultat est présenté comme une limite, ce qui est plus correct : on ne peut pas affirmer que $F_n = F_{n+1}$; on peut observer que ces termes sont de plus en plus proches, ce qui ne suffit d'ailleurs pas à prouver que la limite existe.
Mais en admettant que F_n tend vers un réel x, on a bien que F_{n+1} tend aussi vers x, que $1/(1+F_n)$ tend vers $1/(1+x)$ et donc $x = 1/(1+x)$.
On pourrait aussi dire que $[\overline{1}]$ s'écrit naturellement $1+\frac{1}{1+[\overline{1}]}$, et que si cette fraction correspond bien à une valeur réelle x, ce nombre doit satisfaire l'équation $x = 1/(1+x)$.
La résolution de l'équation montre donc que $(1+\sqrt{5})/2$ est la seule valeur possible pour $[\overline{1}]$ (et de même ensuite pour $[\overline{a}\,] = \left(\sqrt{a^2+4}+a\right)/2$ au §2.2).

(3) On a noté en gras $(\boldsymbol{F}_n)$ la suite de Fibonacci, afin de ne pas confondre avec les fractions finies F_n approchant la fraction continue infinie.

(4) Le lecteur aura compris que les coefficients a, b, c au premier membre de ces égalités sont ceux de l'équation générale du second degré $ax^2+bx+c=0$ et de son discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Et en particulier ce a ne doit pas être confondu avec le coefficient a de la fraction continue qui apparaît dans $b=-a$.

(5) On peut remarquer des simplifications :

$$[\overline{2}\,] = \frac{\sqrt{8}+2}{2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+$$

et

$$[\overline{4}\,] = \frac{\sqrt{20}+4}{2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{2} = \sqrt{5}+2$$

Ces résultats sont à rapprocher des fractions continues obtenues pour $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ au paragraphe suivant.

(6) Le coefficient a_0 doit effectivement être la partie entière de $\sqrt{5}$, si on suppose que pour $n \geq 1$ les coefficients a_n de la fraction sont tous strictement positifs, car alors

$$0 \leq \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}} < 1.$$

Ensuite, on raisonne de même avec l'inverse de la partie fractionnaire pour trouver a_1, et ainsi de suite (en s'arrêtant le cas échéant si on aboutit à un entier).