disques à couvrir

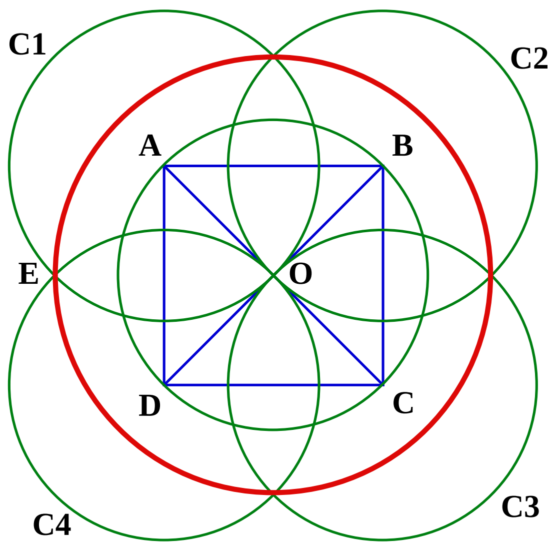
par Cédric Baudequin, David Dos-Santos, du collège Condorcet (rue des Tilleuls 77340 Pontault-Combault) et Hélène Ly (4°), Monirath Ngor (4°), Alexandre Ta (4°), Malynary Taing (4°), du collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet 93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein, M. Hervé Grac, M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

Noisy n° 11, samedi 16h, parrainage de Paris n° 22 : « Disque à couvrir ».
Exposé vivant et très clair. Le but était de trouver le plus grand disque pouvant être recouvert par un ensemble de 5 ou 6 disques. Pour cela, ils sont partis de différentes formes géométriques (rosaces) et ont étendu le problème en faisant coulisser deux disques.

Disque à recouvrir.
Une participation de tous les élèves du groupe ; de bonnes explications sur leur approche expérimentale avec une organisation efficace. Malgré leur jeune âge (élèves de 4°-3°) et leur peu d'acquis dans le domaine mathématique, ils nous ont fortement impressionnés par la qualité de leur démonstration.
(aiguille de Buffon)



Comment recouvrir le plus grand disque possible à l'aide de plusieurs autres disques identiques ? Pour commencer, une des équipes à étudié le problème avec 6 disques et l'autre avec 5 disques. Au cours de ces recherches, nous nous sommes aperçu qu'en fait, nous étions presque obligés d'étudier le cas de 3 et de 4 disques. Nous sommes ainsi en mesure de vous proposer des réponses pour 1, 2, 3, 4, 5 et 6 disques.

Avec 5 disques de rayon unité …

Pour commencer, nous disposons régulièrement quatre disques de sorte que leurs centres soient placés sur les sommets des quadrilatères (losange, carré, rectangle, trapèze) et le cinquième de sorte que son centre soit confondu avec celui des quadrilatères.

à partir d'un carré …

L'un des cinq disques est considéré comme “cercle de base”. Un carré *ABCD* est inscrit dans ce disque. Nous disposons quatre disques de même rayon que le disque de base aux quatre sommets (le centre du cinquième sera le centre du carré, dont les diagonales ont pour mesure le double du rayon d'un des disques).

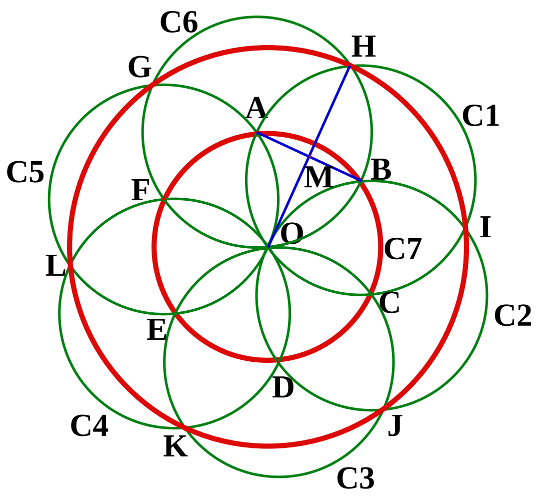
Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les cercles de centres *A*, *B*, *C*, *D* tels que *ABCD* soit un carré de centre *O*. Les quatre cercles se coupent en *O*. Soit *E* le point d'intersection des cercles C_1 et C_4. Puisque *E* et *O* appartiennent au cercle C_4. Puisque *E* et *O* appartiennent au cercle C_1, on a $AE = AO = 1$. Puisque *E* et *O* appartiennent au cercle C_4, on a $DE = DO = 1$. D'où $AE = AO = DE = DO = 1$, donc *AEDO* est un losange.

Or *O* est le centre du carré : les diagonales (*AO*) et (*DO*) sont perpendiculaires, donc l'angle *AOD* est droit et le losange *AEDO* est donc un carré. [NDLR : manque la conclusion cherchée … les cinq (plutôt quatre ! Les élèves auraient pu garder le premier disque dans leur poche) disques ainsi disposés couvrent un disque dont le rayon est $\sqrt{2}$ fois plus grand que celui du cercle de base.]

Avec 6 disques de rayon unité … nous avons travaillé sur une première configuration que nous avons appelée « la Rosace ».

construction de la « Rosace »

On trace un cercle de rayon une unité (il s'agit d'un disque de construction qui ne fait pas partie des 6 disques disponibles). On trace un cercle de même rayon qui a pour centre un point quelconque sur le cercle précédent. Ces deux cercles sont sécants. Chaque point d'intersection est le centre d'un nouveau cercle de rayon unité. On obtient en répétant cette construction la Rosace.



quel est le disque recouvert par cette rosace ?

A est le centre de C_6. B est le centre de C_1 et B appartient à C_6 : donc $AB = 1$.

O est le centre de C_7. A est le centre de C_6 et A appartient à C_7 : donc $OA = 1$.

O est le centre de C_7. B est le centre de C_1 et B appartient à C_7 : donc $OB = 1$.

Puisque $AO = OB = AB = 1$, alors AOB est un triangle équilatéral.

A est le centre de C_6. H appartient à C_6 donc $AH = 1$. B est le centre de C_1. H appartient à C_1 donc $BH = 1$.

Puisque $HA = HB = AB = 1$, alors HAB est un triangle équilatéral.

calculons OH

AOB et HAB sont des triangles équilatéraux identiques donc $AHBO$ est un losange de côté 1. M est le centre de $AHBO$. Dans le triangle BMH rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore on a : $BH^2 = HM^2 + BM^2$

$$1^2 = HM^2 + (1/2)^2$$

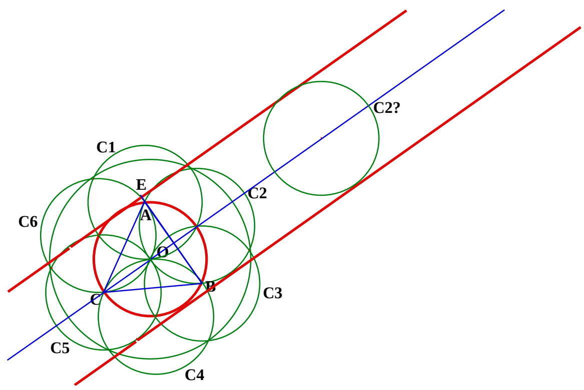
car $BM = (1/2)AB = 1/2$

$$HM^2 = 1 - 1/4$$
$$HM^2 = 3/4$$
$$HM = \sqrt{(3/4)}$$
$$\text{Donc } HO = 2 \times HM$$
$$HO = 2 \times \sqrt{(3/4)}$$
$$HO \approx 1{,}7320508$$

peut-on recouvrir un disque plus grand ?

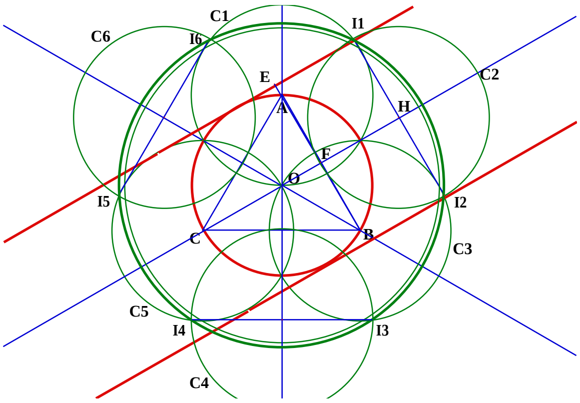
On a pensé à écarter trois disques … On va « écarter » C_2, C_6 et C_4 de la façon suivante :

[NDLR : attention, les points A et B ne sont plus les mêmes que dans la première partie : A est centre de C_1, et B est centre de C_3.]



On trace les tangentes communes à C_5 et au cercle de construction. Ces tangentes sont sécantes au cercle C_1 et C_3 en I_1 et I_2. Ces droites sont parallèles parce qu'elles sont perpendiculaires au segment $[I_1, I_2]$. On trace la médiatrice Δ du segment $[I_1, I_2]$. On fait glisser le cercle C_2 dans cette bande délimitée par les deux tangentes. Le centre de C_2 appartient toujours à Δ. On s'arrête lorsque le diamètre coïncide avec le segment [I1 , I2]. On procède de la même manière avec les cercles C_4 et C_6.

On recouvre ainsi un disque plus grand que celui recouvert par la «Rosace». On nomme cette nouvelle figure « Le Certrieq ».

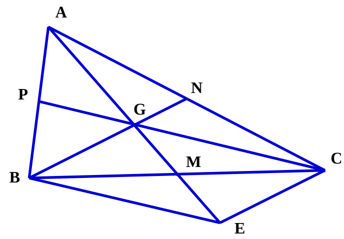


calculons le rayon de ce nouveau disque

O est le centre de gravité du triangle équilatéral *ABC*. [*AO*], [*BO*], [*CO*] sont des rayons des cercles C_1, C_3 et C_5. On a donc *AO* = *BO* = *CO* = 1.
Soit
• [*FC*] est une hauteur du triangle *ABC*
• [*CO*] un rayon
O est le centre de gravité du triangle *ABC*. On a donc *FO* = (1/3) *FC* ou *FO* =(1/2) *OC*. Donc *FO* = 1/2.

Pour ceux qui ne savent pas que le centre de gravité d'un triangle se trouve aux deux tiers des médianes, en voir une preuve en encadré.

Soit *ABC* un triangle quelconque, *G* son centre de gravité, *E* le symétrique de *A* par rapport à *G*.



BGCE est un parallélogramme car :
• dans le triangle *ABE*, d'après le théorème de la droite des milieux, on a (*PG*) parallèle à (*BE*), mais (*PG*) est confondue avec (*PC*). Donc (*GC*) parallèle à (*BE*).
• de même, dans le triangle *AEC*, la droite (*GN*) est parallèle à (*EC*). Donc (*BG*) est parallèle à (*EC*).
BGCE a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc un parallélogramme. Ses diagonales [*GE*] et [*BC*] se coupent en leur milieu *M*.

$GM = (1/2)\ GE$

mais $GE = GA$, donc

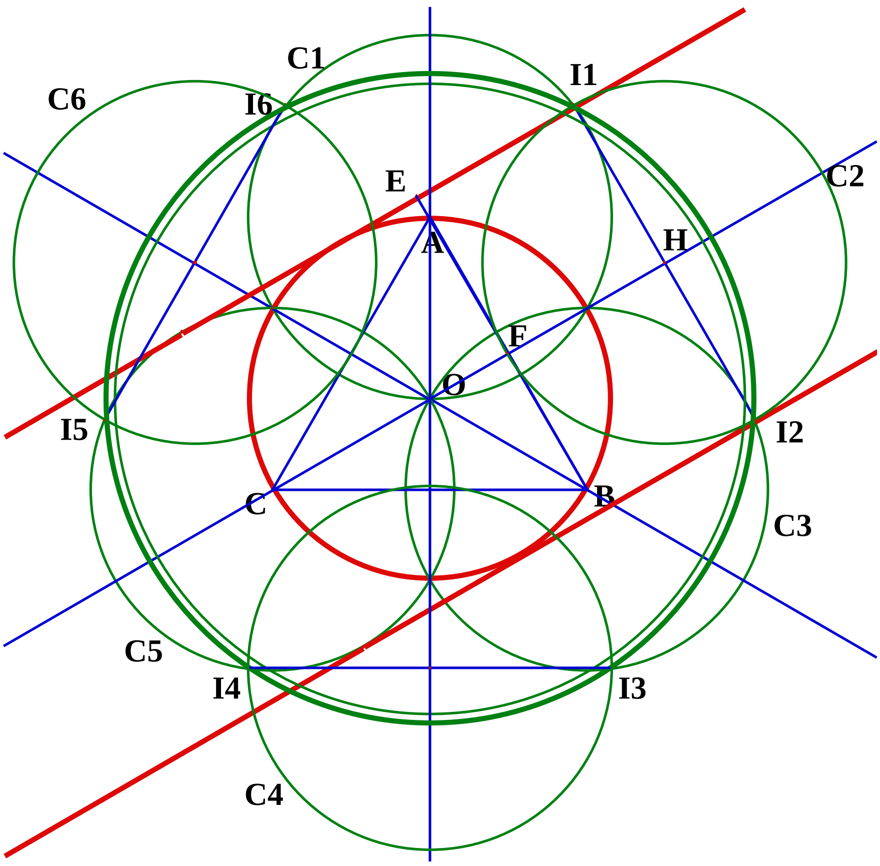
$GM = (1/2)\ GA$

$AM - AG = (1/2)\ AG$

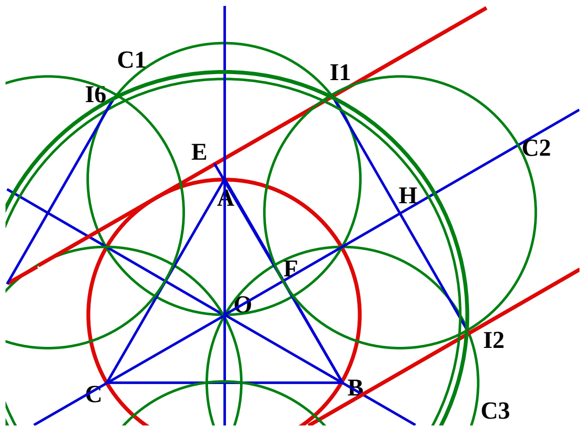
$AM = (1/2)\ AG + AG$

$AM = (3/2)\ AG$

c'est à dire $AG = (2/3)\ AM$ et voilà.



« Le Certrieq »



FOA est un triangle rectangle en *F* d'hypoténuse [*OA*]. Calculons *FA* en utilisant le théorème de Pythagore : $FO = 1/2$; $OA = 1$

$$FA = \sqrt{AO^2 - FO^2}$$
$$FA = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$FA = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$
$$FA = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

On projette orthogonalement [I_1H] en [*EF*], donc $I_1H = EF$. On cherche *EA*.

$$EF = 1.\ EA = EF - AF = 1 - \sqrt{(3/4)}$$

EI_1A est un triangle rectangle en *E*. AI_1 est un rayon de C_1. D'après Pythagore, on a :

$$EI_1 = \sqrt{I_1A^2 - EA^2}$$

c'est-à-dire

$$EI_1 = \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}$$

On projette orthogonalement [EI_1] en [*HF*], donc $EI_1 = HF$. On cherche *HO*.
$OF = 1/2$. $HO = HF + FO$

$$HO = \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} + \frac{1}{2}$$

HI_1O est un triangle rectangle en *H*. On cherche I_1O. $HI_1 = 1$ car c'est un rayon. D'après Pythagore on a :

$$I_1O = \sqrt{I_1H^2 + OH^2}$$

C'est le rayon du disque recouvert par le « Certrieq ».

$$I_1O = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}\right)^2}$$

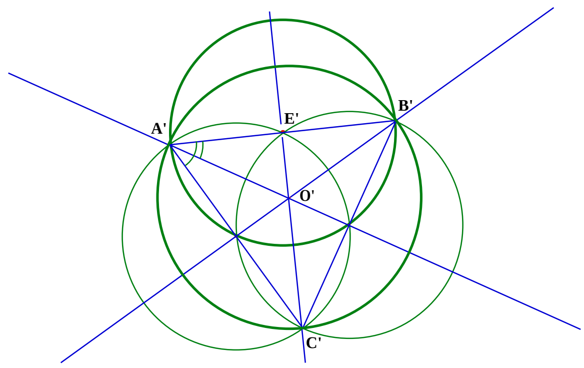
$$I_1O \approx 1{,}79952815$$

Le disque recouvert par le «Certrieq» est légèrement plus grand que celui recouvert par la «Rosace».

Peut-être y-a-t-il encore mieux, mais pour le moment nous n'en savons rien.

Comme vous l'avez constaté, dans l'étude précédente, la position initiale des trois premiers disques est cruciale. Dans la construction du «Certrieq», utilise-t-on la meilleure façon de placer trois disques ?

Si nous plaçons les trois disques comme dans le «Certrieq», les centres *A*, *B* et *C* forment un triangle équilatéral. Le disque recouvert est identique aux trois autres car c'est le disque de base que nous avions tracé pour construire la figure. Si maintenant on dispose les trois disques comme dans cette figure-ci



(les diamètres formant un triangle équilatéral *A'B'C'*), on a $A'B' = 2$.

calculons le rayon O'A' du disque ainsi recouvert

[*C'E'*] est la hauteur issue de *C'*. *E'* est le milieu de [*A'B'*] car dans un triangle équilatéral, les hauteurs sont aussi les médianes. On a

$$A'E' = (1/2)\ A'B' = 1.$$

Dans le triangle $A'E'O'$ rectangle en E', on a $E'A'O' = (1/2)\ E'A'C'$ car $(A'O')$ est la bissectrice de l'angle $E'A'C'$.

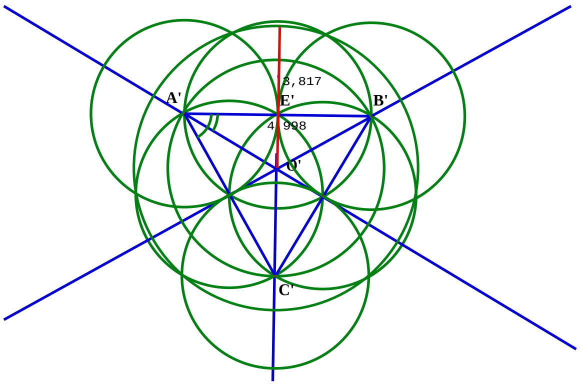
Donc l'angle $E'A'O'$ mesure 30°. Ainsi : $\cos E'A'O' = A'E' / A'O'$. Donc :

$$A'O' = A'E' / \cos E'A'O' = 1 / (\sqrt{3}/2) = 2/\sqrt{3}.$$

D'après la calculatrice, on a $A'O' \approx 1{,}1547005$ ce qui prouve que le disque recouvert est plus grand dans ce cas.

Pourtant, ce n'est pas en partant de la meilleure solution avec trois disques que l'on obtient la meilleure avec 6 disques.

[NDLR : contrôle qualité des écrits : la meilleure disposition (expérimentale) à partir de la solution à trois disques donnerait :



soit un disque couvert dont le rayon serait d'environ 3,817 / 2,499 ≈ 1,527410964, lequel n'est pas si bon que le 1,79952815 du « Certrieq ».]