La monnaie à Diophantie

Chloé Confais-Morieux, Alice Moreau et Léna Vass
(élèves de 4^{e} et de 3^{e})
Établissement : Collège La Rose Blanche, Paris 17^{e}
Enseignante : Mme Amandine Granier, que nous remercions.

I – Le sujet

À Diophantie, un pays imaginaire, on ne dispose que de deux types de pièces de monnaie (leurs valeurs sont des nombres entiers).

Question : Est-il possible de faire tous les prix possibles (valeurs entières) avec ces deux pièces sachant que l'on peut rendre la monnaie ?
Chercher toutes les valeurs possibles pour ces deux types de pièces de monnaie.

II – Les recherches

A) Premières recherches

Tout d'abord, nous avons fait des essais avec des valeurs paires et impaires.

Nous avons commencé à chercher deux valeurs paires : nous en avons déduit que lorsqu'on soustrait la plus petite à la plus grande, on obtient 2 (1). C'est le plus petit écart possible.

Exemple : 6 - 4 = 2

Impossible de trouver tous les prix, toutes les combinaisons possibles donnent des nombres pairs.

Avec deux valeurs impaires, le résultat était soit pair soit impair.
Avec une valeur paire et une impaire, le résultat était soit pair soit impair.

Grâce à ces différentes remarques, nous avons observé ce qui différenciait les résultats et nous avons commencé à comprendre que notre problème à un lien avec la notion de divisibilité.

Nous avons donc recherché des exemples précis pour en tirer une conclusion .
Nous avons constaté qu'avec deux valeurs qui se suivent, on soustrait la plus petite à la plus grande et on obtient 1. On peut ensuite trouver n'importe quel prix en multipliant l'opération par le prix.

Testons avec des valeurs qui se suivent, 4 et 5 :

5 - 4 = 1

On multiplie 1 par le prix demandé et on trouve le prix. On peut donc faire tous les prix.

Mais trouver 1 était aussi possible avec des valeurs qui ne se suivent pas.

Nous avons remarqué que lorsque le plus petit diviseurs commun des valeurs était 1, on pouvait faire tous les prix.
Par exemple, avec 6 (D_6 {1 ; 2 ; 3 ; 6}) et 8 (D_8 {1 ; 2 ; 4 ; 8}), le plus grand diviseur commun est 2, donc ces valeurs ne feront que de valeurs paires.

Les valeurs devaient avoir pour seul diviseur commun 1.

B) Recherches fructueuses

Après s'être assuré de la validité de notre hypothèse, nous avons décidé de trouver 1 à un calcul pour ensuite le multiplier par la valeur du prix à payer.

Par exemple, pour trouver 17 avec des pièces de 4 et 5, on peut faire : 17 x 5 –17 x 4 = 17,
car on sait que 5 – 4 = 1.

Nous avons fait plusieurs essais qui nous ont menés à ce calcul :

$$V_1 * x - V_2 * y = 1$$

$V_1 * x$ est le nombre de la première valeur de pièces que l'on donne pour payer.

"–" signifie que l'on rend la monnaie suivante.

$V_2 * y$ est le nombre de la deuxième valeur de pièces que l'on rend.

Exemple : 7*3 –*4 = 21 – 20 = 1

C'est-à-dire que si on donne 3 pièces de 7 et que l'on nous rend 4 pièces de 5, on aura payé 1.
On peut ensuite répéter l'échange le même nombre de fois que le prix et faire tous les prix.

Enfin, nous avons dû trouver un rapport entre les valeurs qui nous permettait de trouver 1 au calcul.

Définition : Un nombre premier est un entier positif qui ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Définition : Deux nombres premiers entre eux sont deux entiers positifs qui ne possèdent qu'un diviseur commun : 1.

Le fait que les deux valeurs V_1 et V_2 soient premières entre elles permet en effet de trouver 1 au précédent calcul (2).
Pourquoi ces deux valeurs doivent être premières entre elles ?
- Nous avons constaté précédemment que si les valeurs des pièces étaient paires alors les prix obtenus seraient tous pairs.
- Nous avons aussi remarqué que si la valeur des deux pièces avaient un diviseur commun alors le prix minimal strictement supérieur à 0 qu'on pouvait obtenir était ce diviseur.
Pour faire tous les prix possibles il faut pouvoir obtenir 1. Donc en prenant deux valeurs de pièces qui sont premières entre elles, leur seul diviseur commun est 1.

III – Exemples et contre-exemples

Testons avec des valeurs premières entre elles qui se suivent : 8 et 11.

11x - 8y = 1
11*3 - 8*2 = 1
33 - 32 = 1

On multiplie 1 par le prix demandé et on trouve le prix. On peut donc faire tous les prix.

Testons avec des valeurs premières entre elles qui se suivent : 35 et 24.

35x - 24y = 1
35*11 - 24*16 = 1
385 - 384 = 1

On multiplie 1 par le prix demandé et on trouve le prix. On peut donc faire tous les prix.

Attention : Cela ne marche que lorsqu'il n'y a que 1 pour diviseur commun.

Testons avec des valeurs qui ne sont pas premières entre elles : 18 et 20.
Ces deux nombres ont deux diviseurs communs : 1 et 2. Ils ne peuvent donc que faire des valeurs paires.

20y – 18x
20*1 – 18*1
20 – 18 = 2

On a 20*1 – 18*1 = 2.
2 est le plus petit écart possible. On ne peut pas faire tous les prix.

Testons avec des valeurs qui ne sont pas premières entre elles : 15 et 20.
Ces deux nombres ont deux diviseurs communs : 1 et 5. Ils ne peuvent donc que faire des valeurs divisibles par 5.

20y – 15x
20*1 – 15*1
20 – 15 = 5

On a 20*1 – 15*1 = 5.
5 est le plus petit écart possible. On ne peut pas faire tous les prix.

IV – Conclusion

Avec deux types de pièces de monnaie, il est possible de faire tous les prix à valeur entière mais à condition que les valeurs V_1 et V_2 soient premières entre elles.

Notes d'édition

(1) Plus précisément, on obtient *au moins* 2.

(2) Cette affirmation est exacte : c'est l'identité de Bézout (ou théorème de Bachet-Bézout), mais sa preuve est un peu complexe pour les collégiens.