Les Différences Magiques

Année 2013-2014

Tesch Maxime (3ème), Duval-Dachary Fanny (5ème), Desbordes Matthieu (6ème)

Encadrés par :Mme Le Guyader et Mr Guérin

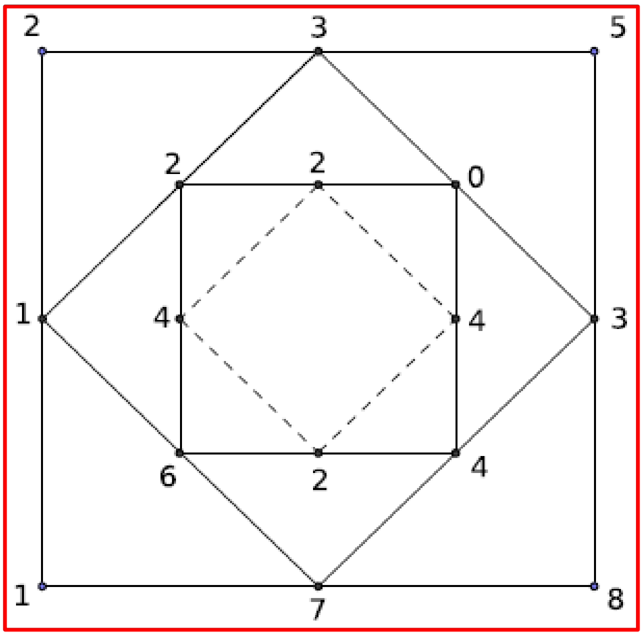
Établissements :Collège Victor Hugo à Nantes, en jumelage avec le collège Paul Langevin de Couëron

Chercheur :Pierre Vidotto ,de la faculté de Nantes

Tout d'abord, **nous tenons à remercier le CNRS pour son soutien financier** dans notre projet Math.en.Jeans.

Enoncé de notre problème : *D'après un article de Romain Bondil, « Boîtes à différences »*

Nous allons commencer par choisir quatre nombres entiers, par exemple 1, 8, 5 et 2, que l'on place à chaque sommet d'un carré (la longueur des côtés du carré n'a pas d'importance, seuls les chiffres comptent), comme sur le dessin ci-dessous.



Ensuite, on choisit un côté, et on écrit, au milieu de ce côté, la différence des nombres inscrits à chaque extrémité du côté (on fera automatiquement la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres utilisés, pour pouvoir obtenir un résultat positif). On répète alors ce procédé sur chacun des côtés du carré.

La question que l'on se pose alors est, ce procédé s'arrête-t-il à un moment (c'est-à-dire que l'on obtient plus que des zéros), et si oui, pourquoi ?

Annonce des conjectures et résultats obtenus:

Nos recherches nous ont permis de conclure que le procédé s'arrêtait toujours au bout de quelques étapes. Le nombre maximal d'étapes que nous avons observé est 10.

Nos recherches:

1°) Représentation en tableaux : Pour pouvoir aller plus vite, nous avons décidé d'utiliser des tableaux, pour ne pas avoir à reproduire à chaque fois la figure.(1)

1	**8**	**5**	**2**
7	3	3	1
4	0	2	6
4	2	4	2
2	2	2	2
0	0	0	0

2°) Résultats de nos essais :

Nous avons fait plusieurs tests en prenant différents nombres au départ. Voici deux exemples de tests.

10	**23**	**40**	**3**
13	17	37	7
4	20	30	6
16	10	24	2
6	14	22	14
8	8	8	8
0	0	0	0

40	**30**	**8**	**38**
10	22	30	2
12	8	28	8
4	20	20	4
16	0	16	0
16	16	16	16
0	0	0	0

C'est alors que nous avons remarqué que même en utilisant n'importe quel nombre entier, on arrivait toujours à 4 zéros. Nous avons donc pu ainsi répondre à la première partie de la question.

3°) Le maximum d'étapes observées :

Jusque-là, tout va bien. C'est quand il faut répondre à la deuxième partie de la question que ça se corse. En effet, à la suite de multiples tests, nous avons obtenu un nombre maximum d'étapes.

Les nombres qui nous ont permis de trouver cela sont **3, 3600, 1616 et 494**(2). Grâce à eux, nous avons pu obtenir 10 étapes,comme on le voit sur le tableau ci-dessous.

3	**3600**	**1616**	**424**
3597	1984	1192	421
1613	792	771	3176
821	21	2405	1563
800	2384	842	742
1584	1542	100	58
42	1442	42	1526
1400	1400	1484	1484
0	84	0	84
84	84	84	84
0	0	0	0

Nous avons alors essayé de multiplier tous les nombres par un nombre pris au hasard (qui dans le cas présent est le **3**), et nous avons refait un tableau avec ces nouveaux nombres, qui sont respectivement **9, 10800, 4848 et 1272** (voir le tableau page suivante)**.** Nous avons alors de nouveau obtenu le même nombre d'étapes, 10. C'est jusqu'à maintenant le nombre maximum d'étapes que nous avons pu obtenir.

Nous avons conclu de cet exemple et d'autres exemples que, lorsqu'on multipliait ou divisait les 4 nombres de départ par un même nombre, le nombre d'étapes ne changeait pas.(3)

9	10800	4848	1272			
10791	5952	3576	1263		X	3
4839	2376	2313	9528		3	9
2463	63	7215	4689		3600	10800
2400	7152	2526	2226		1616	4848
4752	4626	300	174		424	1272
126	4326	126	4578			
4200	4200	4452	4452			
0	252	0	252			
252	252	252	252			
0	0	0	0			

Multiplication

4) Recherche d'explications:

Ensuite, nous sommes dit qu'en remontant à partir de la dernière étape (c'est-à-dire en faisant l'inverse), nous trouverions plus facilement la solution à ce problème. C'est ainsi que, en partant de la fin, dans les 4 premières étapes, nous remarquons une sorte de symétrie, qui s'arrête tout de suite passée la 4e étape.

1	0	0	0	Pas de symétrie
1	0	0	1	Symétrie
1	0	1	0	Symétrie
1	1	1	1	Symétrie
0	0	0	0	Symétrie

Notre chercheur nous a alors demandé de voir si la parité des nombres (pairs ou impairs) avait une importance quelconque sur le nombre d'étapes qu'il fallait pour arriver à zéro. Nous avons cherché en utilisant les lettres 'p' pour pair et 'i' pour impairs, ce qu'illustre l'exemple suivant.

5	4	7	10
1	3	3	5
2	0	2	4
2	2	2	2
0	0	0	0

=

i	p	i	p
i	i	i	i
p	p	p	p
p	p	p	p
p	p	p	p

Nous avons pu observer qu'arrivés à un certain point, nous n'obtenions plus que des nombres pairs (p), ce qu' illustre le tableau ci-dessous.

p	p	p	p
p	p	p	p
p	p	p	p
p	p	p	p
p	p	p	p

Grâce aux résultats alors obtenus, nous avons pu conclure qu'étant donné que les résultats étaient toujours positifs, nous ne « pouvions pas descendre » en dessous de zéro.
Plus précisément, à partir d'une certaine étape on obtient toujours 4 nombres pairs. Si on divise ces 4 nombres pairs par 2, le nombre d'étapes pour arriver à '0-0-0-0' ne change pas. Il est donc normal que le procédé s'arrête à un moment, car n'importe quel nombre n'est pas indéfiniment divisible par 2. C'est là l'idée-clé, que notre chercheur nous a suggérée, mais qui n'est pas facile pour nous d'expliquer. C'est sur cette constatation que se termine pour nous la résolution du problème des différences magiques.(4)

Notes d'éditions

(1) La représentation en tableau n'est pas seulement un gain de temps pour les auteurs, c'est une représentation plus succincte, qui une donne une meilleure lisibilité de l'énoncé. Il aurait été intéressant d'expliquer comment lire le tableau (avec quelques flèches) car sa lecture n'est pas immédiate. Disons que les lignes successives de chaque tableau donnent les valeurs des sommets de chaque nouveau carré.

(2) Comment ces 4 nombres ont-ils été choisis ? Est-ce un exemple qui se termine au bout de 10 étapes et que 10 c'est un bon chiffre ? Ou bien existe-t-il des exemples où le nombre d'étapes est plus grand ?

(3) Un exemple ne suffit pas pour faire une preuve et généraliser un cas, mais qu'on peut se convaincre du résultat en notant que chaque ligne du tableau reste multipliée par ce nombre

(4) On peut remarquer que si la question posée est facilement compréhensible, la preuve du résultat (le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes) est difficile – et les élèves s'en sont plutôt bien sortis. On peut lire cette preuve complète ici : http://images.math.cnrs.fr/Boites-a-differences-I.html.