Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Rapin Lucas (seconde), Giraud Mael (seconde)
Moreau Paul (seconde), Hemmerlé Lionel (Terminale S)

Dessine moi une arête

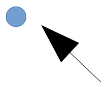
Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot, chercheur à la faculté des sciences d'Angers.

Lycée Môquet-Lenoir, Châteaubriant (44)

Introduction :

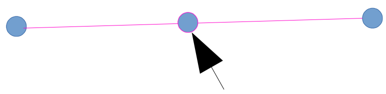
Dessine moi une arête est un jeu se jouant à deux joueurs, avec une feuille et un crayon.

Avant de commencer, les joueurs placent un certain nombre de points sur la feuille :



Un point. Il faut en placer un nombre quelconque pour pouvoir commencer à jouer.

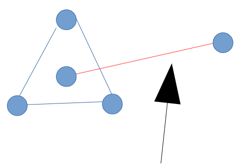
Une fois les points placés, les joueurs relient à tour de rôle deux points via un trait, puis placent un autre point sur ce trait :



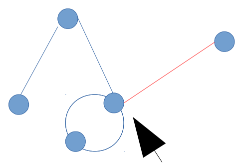
Un trait reliant deux points, avec le point rajouté au milieu. Il est également possible de faire un trait débutant et finissant en un même point.

Néamoins, les joueurs doivent respecter certaines règles pour pouvoir placer leur trait :

- Un point ne peux pas être relié à plus de trois traits ;
- Un trait ne peux pas en couper un autre.



Ce trait coupe un autre trait existant, et ne peut donc pas être tracé.

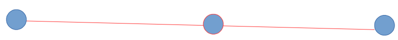


Ce point est déjà relié a trois autres traits, le trait rouge ne peut donc pas être tracé

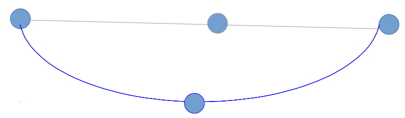
Lorsqu'un joueur ne peut plus placer de trait, il a perdu.

Voici un exemple de partie :

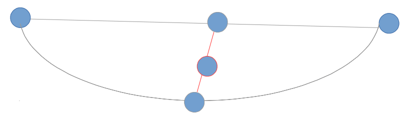
Situation initiale, il y a deux points sur la feuille.



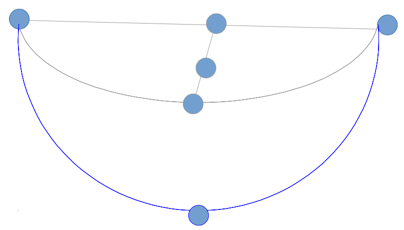
Le premier joueur relie les deux points par un trait, et place un autre point sur ce trait.



Le second joueur joue à son tour, relie les deux points du départ par un trait, et place un point sur ce trait.



Le premier joueur joue ensuite dans la boucle qui a été créée.



Le second joueur joue alors en dehors de la boucle

Les deux seuls points qui sont reliés à moins de trois traits ne peuvent pas êtres reliés sans couper un trait existant, le joueur 1 ne peut donc pas jouer, et a perdu.

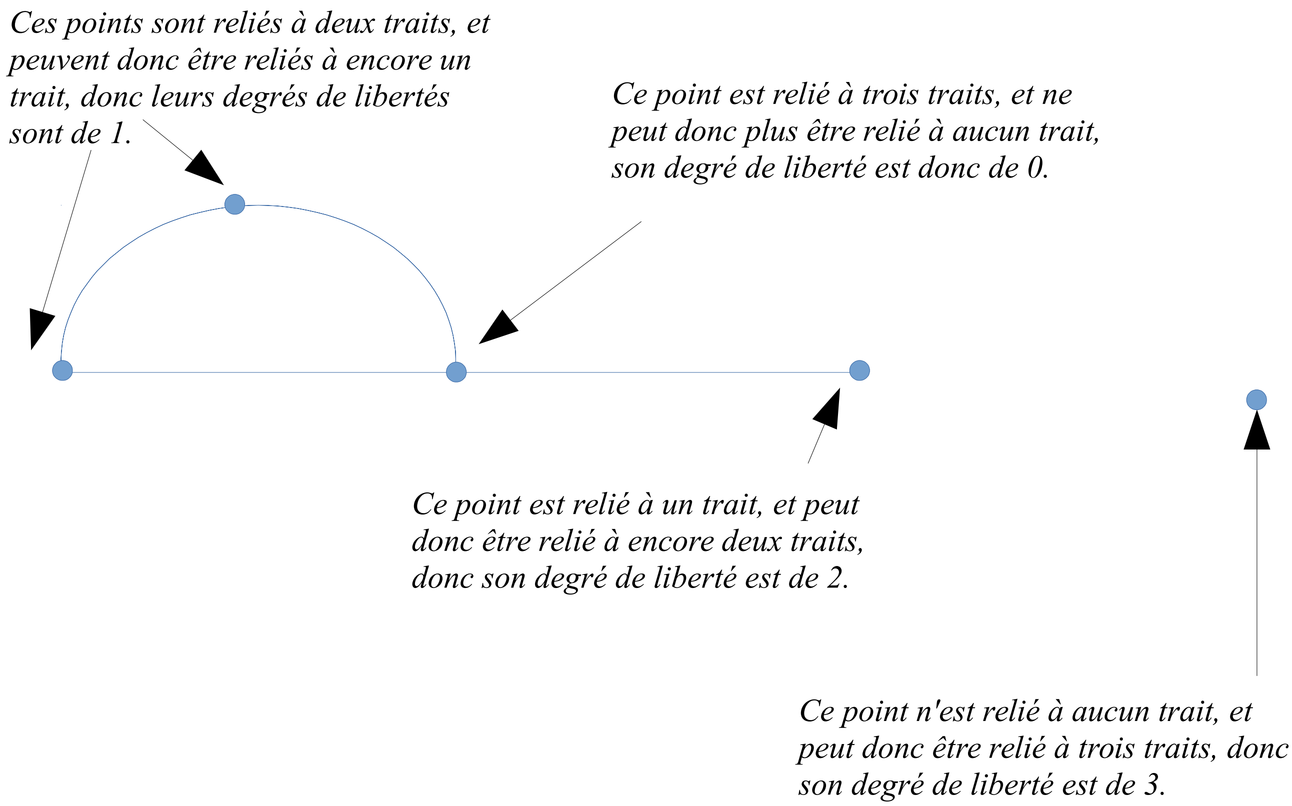
Sommaire :

I – Degré de liberté d'un point

Définition :

On appelle degré de liberté le nombre de segments pouvant encore être reliés a un point.
Au cours de la partie, chaque point a donc un degré de liberté de trois moins le nombre d'arêtes déjà reliées au point.

Exemple :



II – Minimum

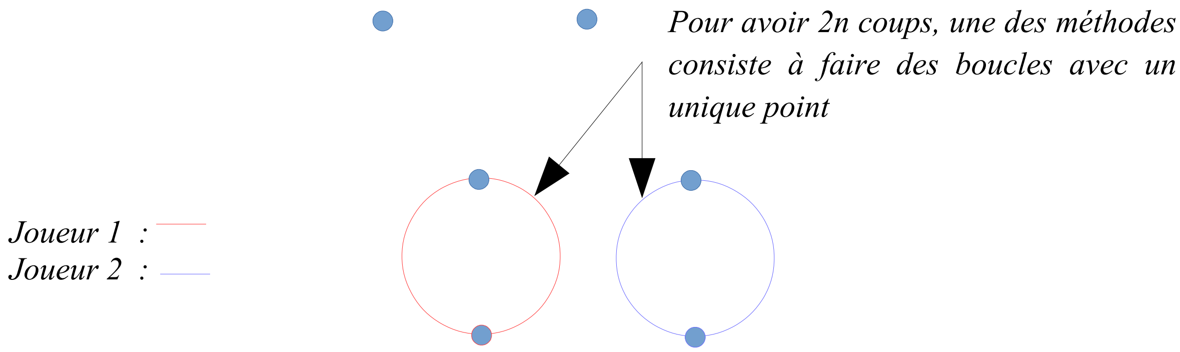
Soit n le nombre points de départ.
Chaque point a un degré de liberté de trois , ainsi chaque point ne pourra recevoir qu'un maximum de trois liaisons.

Conjecture :

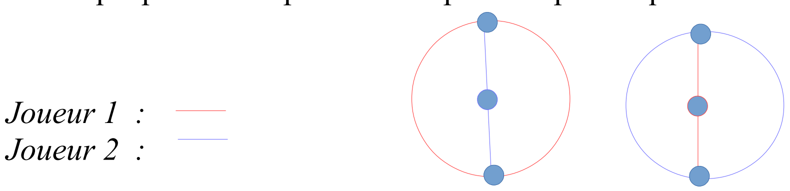
Avec n points au départ, la partie ne peut pas être finie avant d'avoir joué 2n coups.

Exemple : (1)

Il est possible de minimiser le nombre de coups pour obtenir 2n coups à partir de n points au départ en utilisant par exemple le plan de jeu suivant expliqué pour n=2.



en faisant ces boucles, 2 possibilités sont enlevées à chaque point. Il reste un degré de liberté pour chaque point de départ comme pour les points qui ont été créés.



En reliant les points entre eux dans une boucle, un point est isolé avec un degré de liberté de 1. Il y a donc deux points restants avec un degré de liberté qui permettrait de jouer encore une fois pour finir la partie. Seulement ils sont isolés à cause de la boucle : la partie est donc finie en 4 coups.

Cette méthode peut se généraliser en commençant avec n points.

Remarque :

Il existe peut être une méthode permettant d'obtenir mieux que 2n coups.

III – Maximum

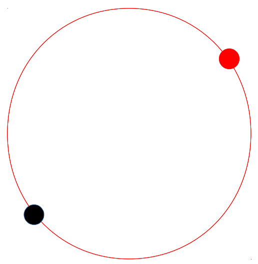
Soit n le nombre de points de départ.

Théorème :

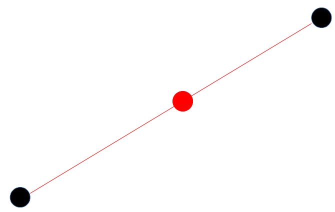
Une partie se finit en au plus 3n-1 coups.

Démonstration :

Lorsqu'un joueur joue, il peut placer son trait de deux manières différentes :
- il fait une boucle en reliant les deux extrémités du trait à un même point
- il relie les deux extrémités de son trait à deux points différents



Le joueur relie les deux extrémités du trait à un même point



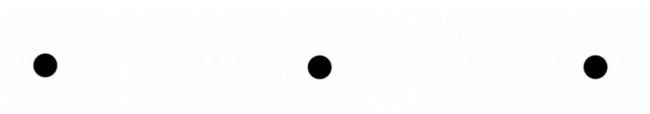
Le joueur relie les deux extrémités du trait à deux points différents

Ainsi, à chaque nouveau trait tracé, le nombre total de degrés de liberté diminue de 2, de 1 pour chaque extrémité du trait, mais augmente de 1 grâce au nouveau point rajouté sur le trait.
Le nombre total de degrés de liberté diminue donc de 1 à chaque trait tracé.

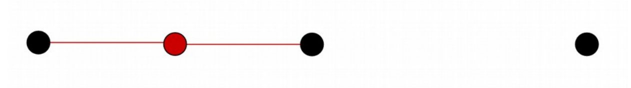
Après 3n-1 coups, le nombre total de degré de liberté est donc de 1, et comme il faut au moins deux degrés de liberté pour tracer un trait, la partie est donc finie.

Exemple : (2)

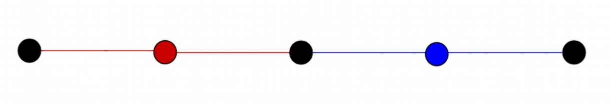
La méthode suivante permet d'obtenir le nombre maximum de traits pour n=3, mais elle peut se généraliser en répétant certaines étapes. (3)



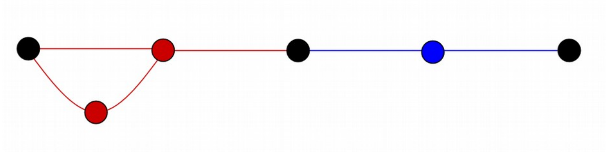
Situation de départ. Pour cet exemple, n vaut 3. Néanmoins, cette technique fonctionne pour tout nombre entier n ≥ 1.



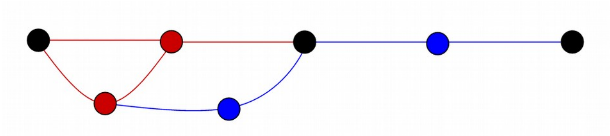
Le joueur 1 décide de tracer un premier trait qui relie le point de gauche à celui du milieu. Il place par la suite un nouveau point sur le trait tracé.



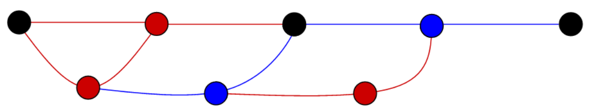
Le joueur 2 trace à son tour un trait reliant le point du milieu à celui de droite. Il place par la suite un point au centre du trait récemment tracé.



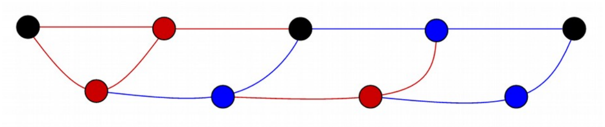
Au tour du joueur 1 pour la seconde fois, ce dernier relie les deux points à l'extrémité gauche de la chenille. Il place un point au centre de ce trait.



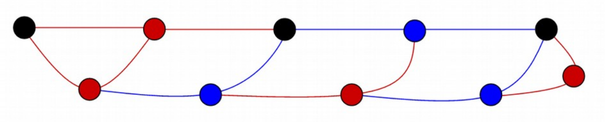
De la même façon, le joueur 2 joue pour sa seconde fois et relie deux nouveaux points. Il place un nouveau point au milieu du trait récemment tracé.



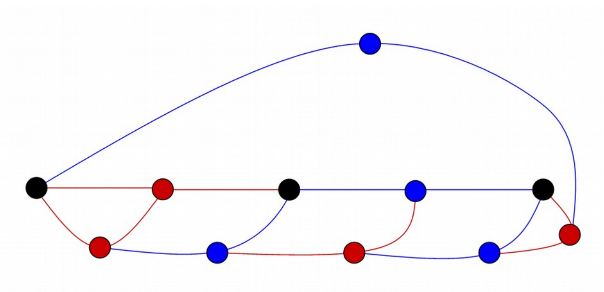
Le joueur 1 poursuit à l'identique



Le joueur 2 prends nouvelle fois le relais et trace un trait sur lequel il rajoute un point.



La technique de la chenille est pratiquement achevée. En effet, le joueur 1, en traçant un nouveau trait, va réduire tous les points de départ sauf un à un degré de liberté de 0.



Enfin, le joueur 2 trace le dernier trait réalisable puisqu'il n'y a plus que deux points avec un degré de liberté supérieur à 0 (ici 1). Le point placé au milieu de ce trait présente toujours un degré de liberté de 1. Cependant, il s'avère que c'est le seul. La partie est donc terminée.

IV – Plan de bataille

Les mouvements du joueur 1 sont symbolisés par des flèches bleues, et ceux du joueur 2 par du vert

A – Départ avec deux points

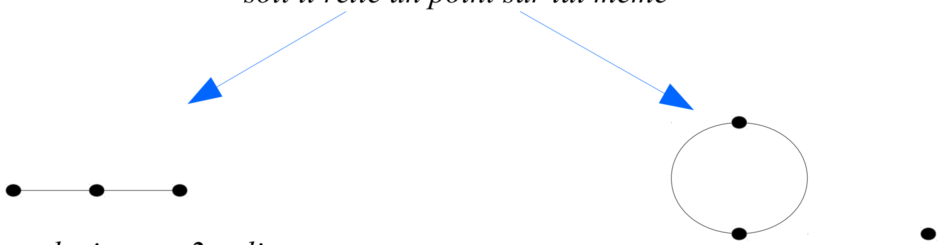
Théorème :

Si la partie commence avec deux points, le joueur 2 dispose d'une stratégie gagnante.

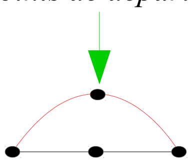
Démonstration :

Lorsque la partie commence avec deux points, le joueur 2 peut gagner en suivant le plan de bataille suivant :

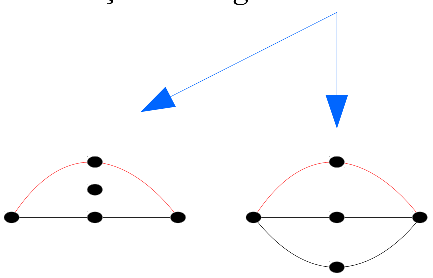
Le joueur 1 peut jouer de deux façons différentes :
-soit il relie les deux points de départ entre eux
-soit il relie un point sur lui même



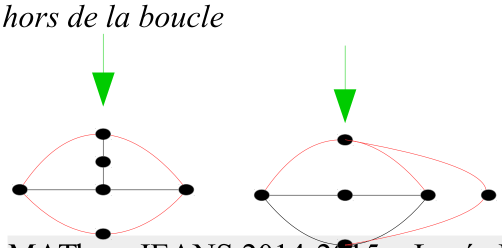
Dans ce cas, le joueur 2 relie les deux points de départ.



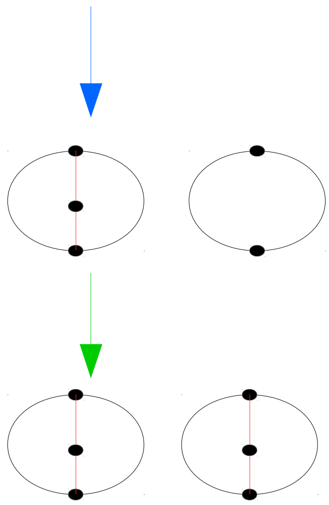
Le joueur 1 a donc deux possibilités, soit il relie deux points en traçant un segment dans la boucle, soit il relie deux points en traçant un segment hors de la boucle



S'il a tracé son segment hors de la boucle, il faut alors relier les deux points restants en traçant un segment dans la boucle, dans le second cas, il faut alors relier les points restants en traçant un segment hors de la boucle



Dans ce cas, le joueur 2 relie les points ne possédant qu'un seul degré de liberté de façon à ce que le point formé ne puisse pas être relié au point restant



(4)

Dans cette branche du plan de bataille, les deux derniers coups peuvent être joués dans un autre ordre, cela n'influence pas l'issue de la partie

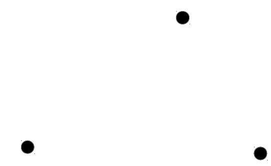
B – Départ avec trois points

Théorème :

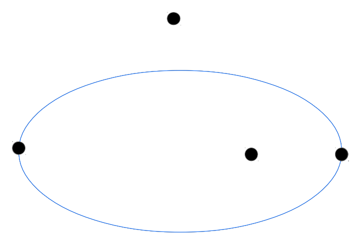
Si la partie commence avec trois points, le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante.

Démonstration :

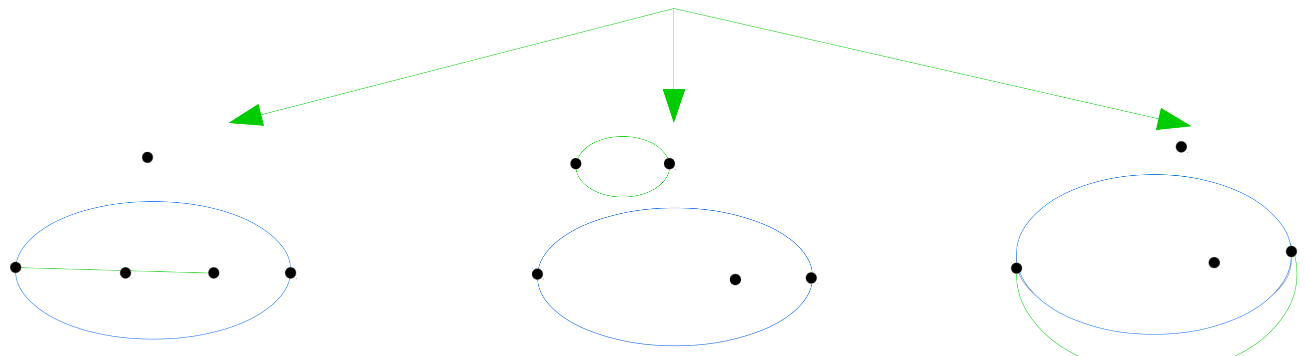
Lorsque la partie commence avec trois points, le joueur 1 peut gagner en suivant le plan de bataille suivant :



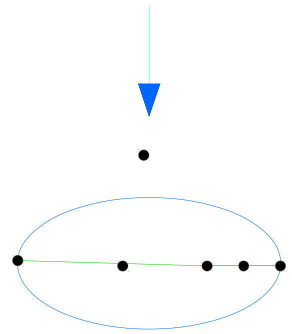
Pour pouvoir gagner, le joueur 1 doit commencer par faire une boucle avec un point, en entourant un autre point avec cette boucle.



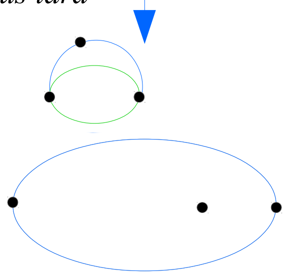
Le joueur 2 a alors 3 possibilités :
- il relie un des deux points inutilisé à un point de la boucle
- il fait une boucle avec l'un des deux points encore inutilisé
- il relie les deux points situés sur la boucle déjà tracée



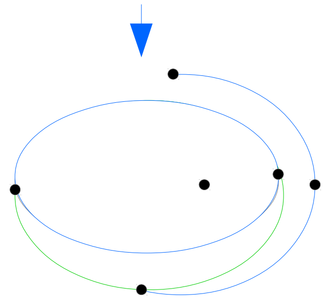
Dans ce cas, le joueur 1 doit relier l'extrémité du segment tracé par le joueur 2 à l'autre point de la boucle



Dans ce cas, le joueur 1 doit alors relier les deux extrémités de la boucle tracée par le joueur 2, de manière à ce que le point rajouté puisse être relié à un autre point plus tard



Dans ce cas, le joueur 1 doit relier le point rajouté par le joueur 2 à un des deux points n'ayant pas encore été utilisé



Le plan de bataille ne se poursuit pas jusqu'à la fin de la partie, car quels que soient les traits tracés ensuite, le joueur 1 ne peut pas perdre. (5)

Conclusion

Chaque point dispose donc d'un degré de liberté, indiquant le nombre de segments pouvant encore être reliés à ce point.

Ces degrés de liberté permettent de montrer qu'il existe un maximum au nombre de traits pouvant être tracé en une partie, qu'une partie aura donc obligatoirement une fin.

Il est également possible de conjecturer un nombre minimum de traits pouvant être tracés, avant lequel une partie ne peut pas se finir.

Enfin, en établissant des plans de batailles, il est possible de déterminer que le joueur 2 dispose d'une stratégie gagnante lorsque la partie commence avec deux points, et que le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante si la partie commence avec trois points

Notes d'édition

(1) L'exemple qui suit montre plutôt qu'on peut finir une partie avec n points au départ en au plus 2n coups. Autrement dit, la longueur minimale d'une partie à n points est au plus 2n. La remarque signifie que la longueur minimale pourrait être inférieure à 2n.

(2) L'exemple n'illustre pas le théorème précédent, mais montre que le résultat obtenu est le meilleur possible : avec n points au départ, il est possible de jouer une partie en 3n -1 coups.

(3) Pour se convaincre qu'il y a bien 3n-1 coups joués dans le cas général, on peut faire les calculs suivants. A la fin de la première phase, on a ajouté n-1 points au n points de départ. On a donc 2n-1 points à ce stade. Lors de la seconde phase, on ajoute (2n-1)-1 = 2n-2 points. On est donc à (n-1) + (2n-2) = 3n -3 coups pour les 2 joueurs. Quand la chenille est pratiquement terminée, le joueur 1 ajoute encore 1 point, et le dernier coup du joueur 2 est bien le coup 3n-1.

(4) L'argument proposé pour la fin de partie n'est pas tout à fait exact. Il reste effectivement deux coups à jouer mais le joueur 1 n'a pas le choix, il ne peut que relier le point restant à lui même. Le joueur 2 peut alors terminer la partie en reliant les deux points de la nouvelle boucle.

(5) C'est effectivement le cas mais ce n'est pas si évident à montrer. Pour s'en convaincre, on peut compter les libertés restantes (6 dans tous les cas), puis remarquer qu'il y en aura exactement deux à la fin car le jeu est « séparé » en deux parties avec des libertés de chaque côté qui ne pourront être reliées. Enfin, il n'est pas possible de « séparer » à nouveau des libertés. Il reste donc exactement 4 coups à jouer, deux pour chaque joueur et le joueur 1 gagne.