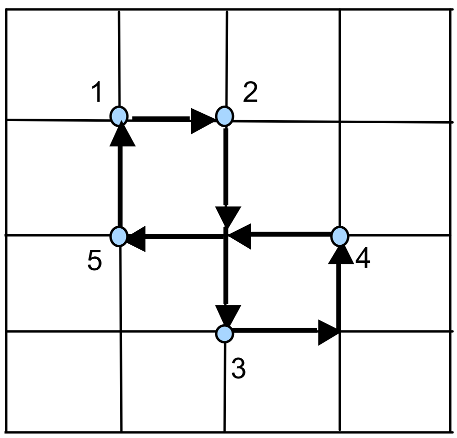
Des circuits imposés

BOUSSAT Nicolas

élève de 1ère S, Lycée Pape Clément à Pessac
Enseignants: Mme DELMAIRE, Mme RANSON M. PRIVAT
Chercheurs: Paul DORBEC, Eric SOPENA (LaBRI, Bordeaux), Marie-Line CHABANOL (Université de Bordeaux 1- Talence)



Sujet

On dispose de grilles rectangulaires de taille $p \times q$. A certaines intersections sont placés des points numérotés [*points de base*]. On doit élaborer un circuit partant du point 1, passant par tous les autres points dans l'ordre du numéro qui leur est attribué puis revenant à l'origine : le point 1.

Attention : *il est interdit de passer deux fois par le même côté d'un carreau de la grille ou par le même point numéroté,* en revanche, *il est permis de passer deux fois par un point **non numéroté** de la grille.*

— Pour une grille et un entier n données, quels arrangements de *n* points de base admettent-ils un circuit solution ?

— Quelles grilles permettent-elles de tracer un circuit solution pour n'importe quelle disposition de n numéros ?]

Mots-clés

CIRCUITS, IMPRIMÉS, GRILLE, RECTANGULAIRE, QUADRILLAGE, CROISEMENT, GRAPHE, PLAN, CONTRE-EXEMPLE

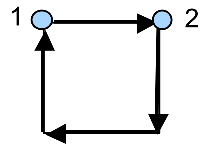
Problématique. On s'intéresse à la question suivante : quel est, pour une grille de taille donnée, *le nombre maximal de points* [*de base*] (noté **max**) *pour lequel il y a toujours un circuit solution*, *quelle que soit la position des points*?

I - Première approche des circuits imposés

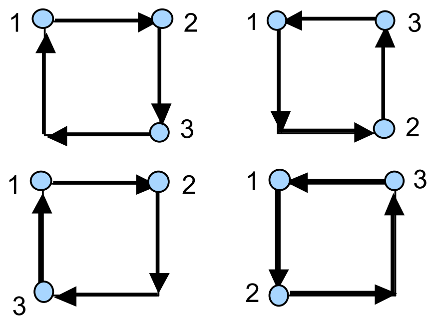
a) Première approche du problème

On commence d'abord par étudier les circuits réalisables sur la plus petite portion de grille possible : un carreau, c'est à dire *un rectangle de taille 1 × 1*. On prévoit de l'augmenter ensuite progressivement.

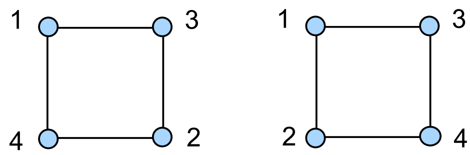
Pour 2 points uniquement, on parvient dans tous les cas à relier les deux points et à revenir au point d'origine, quelle que soit la position des points considérés.



De même, 3 points peuvent toujours être reliés [quelle que soit leur disposition]

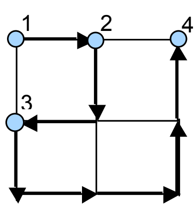


En revanche, 4 points ne peuvent pas être reliés s'ils sont placés comme ci-dessous. Ce cas constitue donc un contre-exemple .

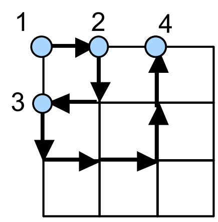


Ainsi, même s'il est possible de relier quatre points dans certains cas, on dira que le cas de 4 points sur une grille de 1 × 1 constitue un contre-exemple, et donc que 4-1=*3 est le nombre maximum de points pour lesquels il y a toujours un circuit solution* quelle que soit la position de ces points sur une grille de taille 1 × 1.

Or, on s'aperçoit ensuite que *quelle que soit la grille considérée*, *il existe toujours un contre-exemple pour quatre points :*



Grille 2×2



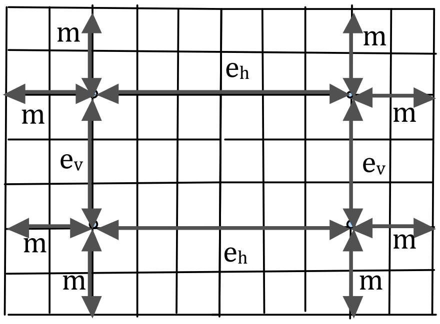
Grille 3×3

b) Des règles à rajouter

Il nous est donc nécessaire d'établir de nouvelles conditions que nous étudierons successivement :

— une condition sur la *marge m* établie depuis le bord de la grille

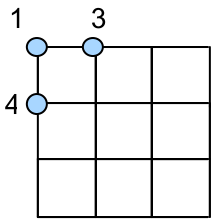
—une condition sur l'*écartement minimal,* horizontal ou vertical entre les points (e_h ou e_v).



c) Théorème 1

Soit une grille rectangulaire de taille k × n. Si cette grille ne possède pas de marge obligatoire prédéfinie (donc m=0) ni d'écartement minimal obligatoire prédéfini (e_h=1 et e_v=1), alors le nombre maximum de points pour lequel il y aura toujours un circuit solution (noté **max***) sera toujours égal à 3 quelles que soient les dimensions de la grille.*

Preuve. On pourra toujours rencontrer la situation illustrée ci-contre.
En effet, lorsque le point 1 est encadré par d'autres points dont le numéro est différent de 2, alors le circuit ne peut être réalisé.



II - Etude de la marge

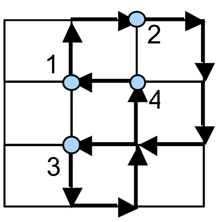
a) Etude expérimentale

Afin d'étudier l'influence de la marge, on pose donc e_h = 1 et e_v = 1.

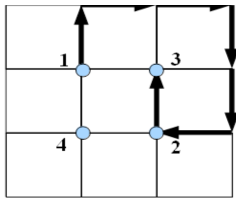
- Cas *m* = 0**.** Ce cas a déjà été traité (cf. théorème 1) : **max** = 3.

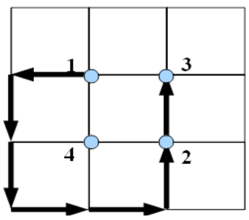
- Cas *m* = 1**.** *Pour m*=1, *il ne nous est pas possible de relier 4 points, quelle que soit la position des points. Ainsi* **max** = 3**.**

Illustrons par un exemple qui montre un circuit possible pour 4 points :



? Cet exemple est suivi de deux contre-exemples [en fait un seul] qui nous intéresseront par la suite.



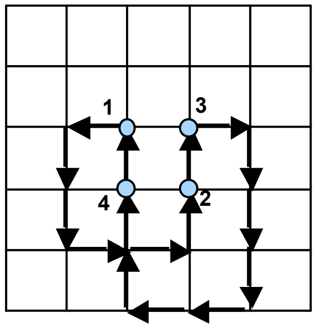


- Cas *m* = 2**.** Pour *m*=2, il devient possible de relier 5 points, quelle que soit la position des points. [...]

Nous allons établir que **max** = 5.

Idée de la preuve. Dans un premier temps, si nous reprenons les contre-exemples des quatre points pour *m* = 1 ci-dessus, les circuits deviennent réalisables grâce à une marge de 2.

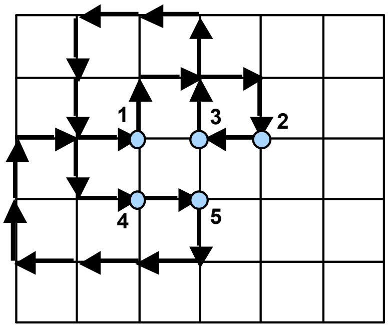
Voici un exemple:

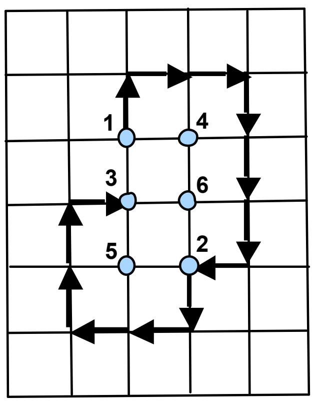


Cela nous donne une indication sur la manière dont la marge de *m*=2 permet de réaliser [tous] les circuits à 5 points.

? Nous avons vérifié, il est toujours possible de relier 5 points pour *m*=2, quelle que soit leur position. [L'auteur n'explique pas comment il traite tous les cas (une infinité ?)].

Voici un exemple :





Pour le cas de 6 points, toujours avec *m*=2, le contre-exemple ci-contre est significatif pour la suite du raisonnement.

[Ce contre exemple montre en fait que] *le circuit devient impossible pour 6 points quelle que soit la valeur de m* (avec e_h= e_v= 1).

On atteint ainsi la limite de l'effet de la marge sur le maximum. On peut donc énoncer un nouveau théorème.

b) Théorème 2

Soit une grille rectangulaire de taille k × n [entiers positifs quelconques] . Soit m la marge comptée depuis le bord de la grille, où m est un nombre entier naturel. Si cette grille a pour écartements minimaux prédéfinis e_h=1 et e_v=1, *alors*

Si m< 2, on obtient **max** = 3

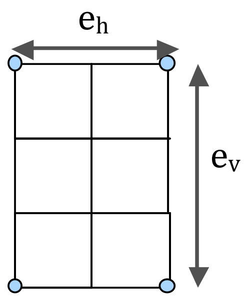
Si m ≥ 2, on obtient **max** = 5.

III - Étude de l'écartement minimal

a) Présentation

L'écartement minimal vertical entre deux points [de base] situés sur une même droite verticale de la grille se note e_v. De même, *l'écartement minimal horizontal* se note e_h.

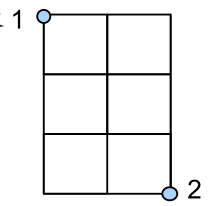
Les expériences menées avec ces paramètres sont réalisées *avec une marge nulle* (donc *m*=0), afin de mieux déceler la progression de **max** en fonction des valeurs e_h et e_v.



On prend la plus petite grille possible, ainsi si $e_h=x$ et $e_v=y$, alors la grille a pour dimensions *xy*.

Exemples : si e_h = 4 et e_v = 5, alors la grille aura pour dimensions 4 × 5. Pour la grille ci-contre, on dira que e_h = 2 et e_v=3.

Note : on n'a jamais considéré le cas suivant :

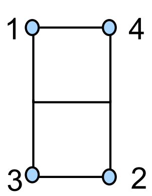
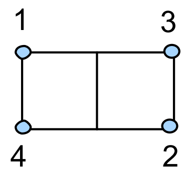


Ici en effet, les points numérotés 1 et 2 n'appartiennent pas à une même droite contenant les lignes de la grille : on ne peut donc pas attribuer à cette grille un écartement minimal horizontal ou vertical.

[**Note.** Il semble que les cas étudiés, et les résultats obtenus dans la suite ne concernent que les grilles qui satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) les points de base sont sur le pourtour de la grille.
(ii) les coordonnées des points de base (en prenant l'origine au coin inférieur gauche) sont toujours des multiples entiers de e_h (pour l'abscisse) et de e_v (pour l'ordonnée).]

Symétrie. Voyons l'exemple suivant :

$e_h = 1$ et $e_v = 2$	$e_h = 2$ et $e_v = 1$
	

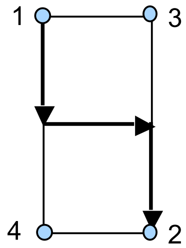
Cet exemple montre comment, par symétrie, on peut considérer comme identiques les deux cas de figures.

Ainsi on a donc deux choix :

- étudier l'écartement pour $e_h \leq e_v$
- étudier l'écartement pour $e_v \leq e_h$.

b) Étude expérimentale

• Pour e_h= 1.

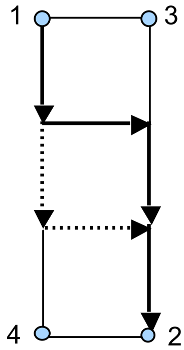


Le cas e_v=1 a déjà été traité (grille de 1 × 1 sans marge : **max** = 3**,** d'après le théorème 1).

Pour e_v=2 : mêmes résultats que pour une grille de dimensions 1 × 2 sans marge : **max** = 3**.**

Expériences complémentaires. On a vérifié :

- pour e_v=3 : **max =3**
- pour e_v=4 : **max** = 3
- pour e_v=5 : **max** = 3



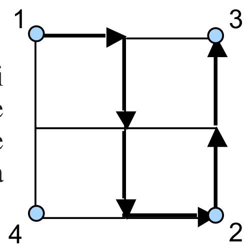
De façon générale, si e_h = 1, quelle que soit la valeur de e_v : **max** = 3.

En effet, dans l'exemple ci-contre, il nous manque trois lignes verticales : une pour remonter au point 3, une pour redescendre sur le point 4 et une pour remonter au point 1.

Le maximum reste ici inchangé quelle que soit la valeur de e_v.

• Pour e_h= 2.

Avec e_v = 2 : **max** = 3 .



On a vérifié tous les cas et voici un exemple montrant que max ne peut être égal à 4 : ici, on atteint le point 3 mais on ne parvient pas à redescendre sur le point 4.

Expériences complémentaires :

On a vérifié [les cas suivant] :

Pour e_v= 3 : **max** = 3

Pour e_v= 4 : **max** = 3

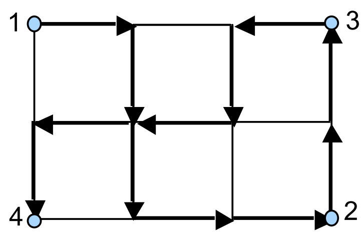
Pour e_v= *x* pour *x* entier naturel ≥ 2: **max** = 3

Dans tous les cas, il nous manque deux lignes verticales : l'une pour redescendre sur le point 4 et l'autre pour remonter sur le point 1.

Le maximum reste ici inchangé quelle que soit la valeur de e_v. Il faut donc augmenter e_h.

• Pour e_h= 3.

Avec e_v=2 : **max** = 3 (on retrouve le cas symétrique e_h = 2 et e_v=3) . Voici un [contre-]exemple :



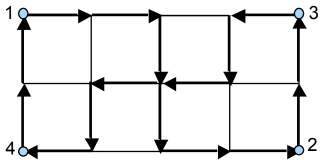
Ici on parvient à atteindre le point 4, mais il manque une ligne verticale pour revenir au point 1.

Expériences complémentaires : on a vérifié pour $e_v = 3$ et pour $e_v = 4$: **max** = 3. Pour $e_v = x$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$: **max** = 3.

Encore une fois, le maximum reste ici inchangé quelle que soit la valeur de e_v.

• Pour e_h= 4.

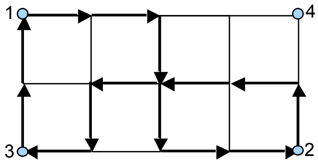
Si e_v=2 : on pourrait penser que **max** = 4 d'après :



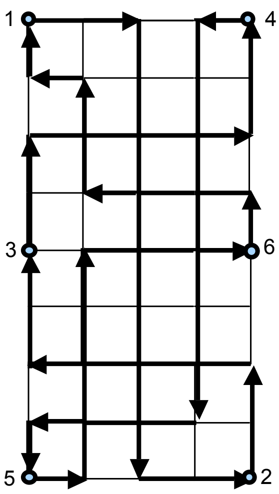
On parvient à relier quatre points de la grille et à revenir au point 1.

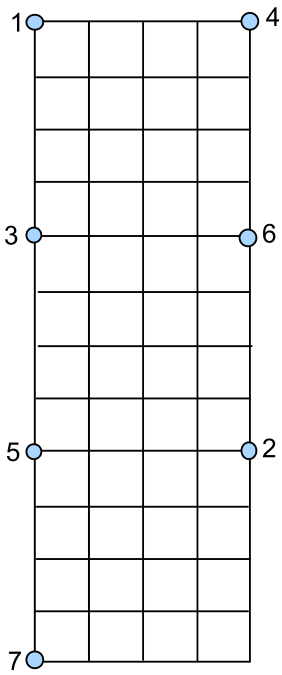
Mais cela contredirait le résultat symétrique obtenu précédemment : $e_h = 2$ et e_v=4 : **max** = 3.

Et en effet le circuit ci-contre est impossible.



Donc, pour que **max** ≥ 4, il faut donc que $e_h \geq 4$.
Avec $e_h = 4$ et e_v=4 : **max** = 6 . On a vérifié.





Ci dessus un exemple pour 6

A droite un exemple impossible pour 7 [la vérification est laissée au soin du lecteur].

c) Suite des résultats.

A l'issue des nombreuses expériences réalisées sur des grilles pour m=0 avec $e_h \geq e_v$, on obtient les résultats [...] que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

e_h	e_v	**max**
4	4	6
4	1,2,3	5
5	4,5	6
5	1,2,3	5
6	4,5,6	8
6	1,2,3	7
7	4,5,6,7	8
7	1,2,3	7
8	4,5,6,7,8	10
8	1,2,3	9
9	4,5,6,7,8,9	10
9	1,2,3	9

Il semble donc [...] que l'on puisse formuler la conjecture suivante.

d) Conjecture

Pour une grille rectangulaire quelconque avec m = 0. et $e_h \geq e_v$.

- *Si e_h<4, alors max = 3.*
- *Pour $e_h \geq 4$, on a :*
  - *si e_h est pair, et e_v <4, alors* **max** = $e_h + 1$
  - *si e_h est pair et $e_v \geq 4$, alors* **max** = $e_h + 2$
  - *si e_h est impair et e_v <4, alors* **max** = e_h
  - *si e_h est impair et $e_v \geq 4$, alors* **max** = $e_h + 1$

[...] Je souhaitais ensuite étudier la combinaison de la marge et des écartements, et observer la progression du maximum par rapport à ces *deux paramètres associés.* Mais l'année se termine, et je n'ai pas trouvé le temps de réaliser ces recherches.

Remerciements

Je souhaiterais remercier toutes les personnes suivantes pour l'aide indispensable et le soutien qu'ils nous ont apportés, ainsi que pour toutes les choses qu'ils nous ont apprises : monsieur Privat, madame Ranson, madame Delmaire, professeurs de mathématiques au lycée pape Clément de Pessac ; Monsieur Sopena, Monsieur Dorbec, enseignants-chercheurs au Labri, Bordeaux, et Madame Chabanol, enseignant-chercheur à l'université de Bordeaux 1 (Talence)

***