Déplacements et arithmétique

2018-2019

Nom, prénom et niveaux des élèves : Elio Coste, Victor Loones, Hipolytte Montagne, Rosalie Ponnelle

Établissement : Lycée Montchapet, Dijon

Enseignants : M. Dancer, Mme Aulagnier, M. Santacruz

Chercheur : Johan Taflin, Université de Bourgogne

1 Présentation du sujet

Le but de notre sujet est de comprendre quels sont les déplacements possibles, n'utilisant qu'un nombre limité de mouvements de base, au travers de deux problèmes.

Premier problème On cherche à se déplacer dans une tour présentant un nombre infini d'étages avec quatre mouvements possibles (on peut monter/descendre de x, $-x$, y et $-y$ étages). Quels sont les étages accessibles ?

Second problème On cherche à déplacer un cavalier sur un échiquier infini : on dispose de déplacements que l'on modélise par huit vecteurs, les quatres vecteurs ci-dessous ainsi que leurs opposés.

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Quelles sont les cases atteignables ?

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Pour le premier problème nous avons remarqué que, lorsque x et y sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur plus grand diviseur commun est 1, il est possible (avec beaucoup de patience...) d'accéder à n'importe quel étage de la tour.

Pour le second problème, en combinant ces vecteurs, si l'on est en mesure de composer un vecteur résultant en un déplacement du cavalier d'une case vers le haut et un autre déplacement d'une case vers la droite, alors on pourra se déplacer partout sur l'échiquier. Nous démontrerons que, si α et β sont impairs, il est impossible d'obtenir un déplacement d'une case vers la droite et on ne peut par conséquent pas aller partout. Nous émettons également une conjecture : si α et β sont *premiers entre eux et de parité différente* (un des deux nombres sera pair et l'autre impair), alors on peut théoriquement se déplacer partout sur le plateau.

3 Premier exemple : Déplacements dans une tour

3.1 Problème

On considère pour commencer une tour de 111 étages, avec un ascenseur particulier : en effet, celui-ci ne dispose que de deux boutons, permettant de monter ou de descendre de 3 ou 8 étages à la fois. On se demande dans quelle mesure on peut se déplacer dans cette tour.

3.2 Exemples

3.2.1 Peut-on aller au 43ème étage ?

On peut monter et descendre de 8 ou 3 étages, autrement dit, si l'on pose m l'étage actuel, on peut accéder aux étages : $m \pm 3$ et $m \pm 8$. On considère les nombres a, a', b et $b' \in \mathbb{N}$ représentants les nombres d'étages dont on peut monter et descendre (ici : $a = 8$, $a' = -8$, $b = 3$ et $b' = -3$), avec $a = -a'$ et $b = -b'$. De plus, on pose α, β, γ et $\delta \in \mathbb{N}$ le nombre de fois que l'on doit utiliser les déplacements en question. On peut donc poser l'équation permettant de caractériser la séquence de déplacements en question : $\alpha a + \beta a' + \gamma b + \delta b' = 1$. Or, on a par hypothèse : $a = -a'$ et $b = -b'$, on peut donc écrire :

$$\alpha a + \beta(-a) + \gamma b + \delta(-b) = 1 \Longleftrightarrow a(\alpha - \beta) + b(\gamma + \delta) = 1$$

On considère de plus x et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \alpha - \beta$ et $y = \gamma + \delta$. On cherche donc une solution à l'équation $8x + 3y = 43$, avec x et y les nombres d'appuis sur chaque bouton. Avec ces nombres assez petits, la solution à cette première équation est relativement simple à trouver. On peut ainsi fixer $x = 5$ et $y = 1$, soit : $8 \times 5 + 3 \times 1 = 43$. *Il suffit donc de monter cinq fois de huit étages et une fois de trois étages afin d'arriver à l'étage quarante-trois.*

3.2.2 Accès à tous les étages avec des déplacements particuliers

On dispose donc de quatre déplacements, et on cherche à accéder à tous les étages de la même tour. On pose à nouveau n l'étage auquel on veut se rendre, et m l'étage actuel (m et $n \in \mathbb{N}$). La démarche présentée ci-après repose sur le raisonnement suivant : si on est capable de monter d'un étage avec les quatre mouvements que l'on peut utiliser, alors il suffit de réitérer la séquence de mouvements résultant en un déplacement de 1 étage vers le haut, et ce jusqu'à arriver à l'étage désiré. La réciproque est également vraie : en effet, si on peut aller partout, alors on pourra forcément accéder à deux étages consécutifs, auquel cas on a donc réalisé, indépendamment de l'ordre dans lequel on a visité les étages, un déplacement d'un étage.

Remarque : si on constate que l'on peut réaliser un déplacement d'un étage vers le bas, on peut affirmer, étant donné que l'on garde toujours les opposés des mouvements fixés, que l'on est en mesure d'effectuer le déplacement contraire.

Avec les déplacements ± 3 et ± 8, on peut trouver une séquence permettant de monter d'un étage assez aisément à la main : En effet : $3 \times 3 - 8 \times 1 = 1$. On peut donc, pour tout étage m, accéder à l'étage $m+1$, on peut par conséquent accéder à tous les étages. Par exemple, si on veut accéder au 4ème étage, on pose : $4(3 \times 3 - 8 \times 1) = 3 \times 12 - 8 \times 4 = 4$, cela signifie qu'il faut appuyer 12 fois sur le bouton $+3$ étages et 4 fois sur le bouton -8.

Un autre exemple de déplacement consiste à utiliser les déplacements ± 3 et ± 6. Cette fois ci, on a 6 multiple de 3, on est donc en incapacité d'obtenir autre chose qu'un multiple de 3 par addition ou soustraction de ces deux nombres. On ne peut par conséquent aller qu'aux étages multiples de 3.

Après avoir essayé divers nombres d'étages, on tente de distinguer les cas où l'on peut aller partout des autres cas en partant directement de ces couples d'entiers. De manière empirique, nous avons pu constater un point commun que semblaient vérifier tous les couples d'entiers avec lesquels on peut aller partout : *tous sont premiers entre eux, c'est à dire que leur plus grand diviseur commun (abrégé PGCD) est de* 1. C'est cette assertion que nous allons tenter de vérifier par la suite.

3.3 Généralisation avec d'autres déplacements

3.3.1 Conditions de déplacement à tous les étages

Après avoir résolu le problème avec les mouvements ± 3 et ± 8, on cherche à savoir avec deux mouvements donnés, si l'on peut aller partout et comment. Comme nous l'avons vu auparavant, il est nécessaire de pouvoir disposer d'une séquence de mouvements qui donne un déplacement final d'un étage vers le haut ou le bas.

On cherchera donc les valeurs de x et $y \in \mathbb{Z}$ pour que l'on ait : $ax + by = 1$, où a et b sont les nombres d'étages dont on peut monter ou descendre.

Afin que l'on puisse se déplacer partout dans la tour, il faut des solutions entières à cette équation. Or, selon le théorème de Bézout, [1] une telle égalité n'a de solutions dans $\mathbb{Z}$ que *si ces deux nombres a et b sont premiers entre eux.*

On aura dès lors la possibilité de se déplacer partout dans la tour si et seulement si les mouvements utilisables sont deux nombres premiers entre eux.

3.4 Conclusion

Si a et b, représentant les déplacements possibles, sont premiers entre eux, alors on peut monter d'un étage. Autrement écrit : Si $PGCD(a, b) = 1$, alors $ax + by = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}$. Par conséquent, on peut trouver une combinaison de déplacements permettant de monter d'un étage, et on peut donc se déplacer partout dans la tour.

4 Second exemple : Déplacement d'un cavalier

4.1 Introduction

On s'intéresse maintenant aux déplacements d'un cavalier sur un échiquier. On souhaite déterminer les conditions nécessaires afin qu'il puisse aller partout sur le plateau.

4.2 Exemples

4.2.1 Aller partout sur l'échiquier classique

On considère donc tout d'abord un échiquier classique (8 cases par 8 cases) et un cavalier (placé arbitrairement sur cet échiquier) disposant des déplacement classiques d'un cavalier (Fig. 1). Avec les déplacements classiques, il est rapide de vérifier de manière empirique que l'on peut aller partout Sur la Fig. 2 ci-dessous, chaque nombre correspond aux cases occupées successivement par le cavalier.

Remarque : Pour plus de lisibilité, le parcours présenté est optimal, c'est à dire que le cavalier passe une seule et unique fois sur chaque case.

On peut aller partout en partant d'une case choisie au hasard, il est par conséquent possible, en partant de n'importe quelle case, de revenir sur cette position de départ, et ainsi de se déplacer partout sur l'échiquier.

1. La preuve de ce théorème a été réalisée en cours de Spécialité d'un élève du groupe, nous n'avons donc pas tenté de le démontrer, afin de pouvoir prendre davantage de temps pour traiter les sujets qui suivent. *Il sera donc admis*

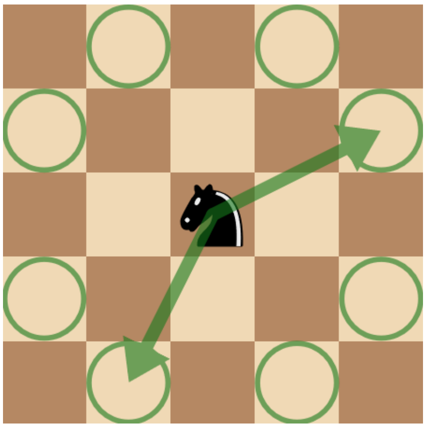

FIGURE 1 – Déplacements classiques d'un cavalier (Réalisé avec Lrgichess)

35	40	47	44	61	08	15	12
46	43	36	41	14	11	62	09
39	34	45	48	07	60	13	16
50	55	42	37	22	17	10	63
33	38	49	54	59	06	23	18
56	51	28	31	26	21		03
29	32	53	58	05	02	19	24
52	57	30	27	20	25	04	01

FIGURE 2 – Un parcours optimal du cavalier sur l'échiquier (Source : Edward D. Collins)

4.2.2 Sur un échiquier infini

On considère maintenant un échiquier infini. On choisit par la suite de modéliser les mouvements du cavalier sur l'échiquier par des vecteurs caractérisant son déplacement d'une case de départ (origine du vecteur) à une autre case d'arrivée.
Pour le cavalier classique, on dispose donc des vecteurs :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u'_1} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u'_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u'_3} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{u'_4} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

On remarque par ailleurs que les quatre derniers vecteurs sont les opposés respectifs des quatre premiers vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u'_1}$, $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{u'_2}$, $\overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u'_3}$ et $\overrightarrow{u_4} = -\overrightarrow{u'_4}$. En considérant un déplacement $\overrightarrow{D}$ quelconque utilisant ces huit vecteurs, on a :

$$\overrightarrow{D} = a\overrightarrow{u_1}+a'\overrightarrow{u'_1}+b\overrightarrow{u_2}+b'\overrightarrow{u'_2}+c\overrightarrow{u_3}+c'\overrightarrow{u'_3}+d\overrightarrow{u_4}+d'\overrightarrow{u'_4} = (a-a')\overrightarrow{u_1}+(b-b')\overrightarrow{u_2}+(c-c')\overrightarrow{u_3}+(d-d')\overrightarrow{u_4}$$

Soient α, β, γ et δ ($\in \mathbb{Z}$ car la différence des coefficients originels qui caractérisent $\overrightarrow{D}$ peut être négative) tels que : $\alpha = (a-a')$, $\beta = (b-b')$, $\gamma = (c-c')$ et $\delta = (d-d')$. On peut écrire : $\overrightarrow{D} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3} + \delta\overrightarrow{u_4}$

Lorsque, comme dans l'exemple précédent, on se déplace dans une tour, on a vu qu'il est nécessaire de disposer d'un déplacement de 1 étage afin de pouvoir aller partout.

De la même manière, on a ici besoin de deux vecteurs : les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ qui permettent respectivement de se déplacer d'une case vers la droite et d'une case vers le haut. Comme on dispose toujours des vecteurs opposés, en remplaçant chaque coefficient par son opposé, on peut obtenir respectivement les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -\overrightarrow{v_2}$. On peut dès lors, à l'instar de la méthode du premier exemple, réitérer la combinaison de déplacements résultant en un déplacement vers la droite (ou la gauche) ainsi que celle résultant en un déplacement vers le haut (ou le bas) un certain nombre de fois afin d'accéder au point désiré.

On peut donc se déplacer partout si l'on trouve des combinaisons de vecteurs (modélisant les déplacements du cavalier) donnant ces deux déplacements. On cherche donc maintenant à trouver une séquence de déplacements, caractérisée par l'addition de vecteurs, afin que l'on obtienne les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Concernant le vecteur $\overrightarrow{v_1}$, on cherche des coefficients tels que :

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

On cherche donc les solutions entières au système d'équations $\begin{cases}2\alpha - 2\beta + \gamma - \delta = 1\\ \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta = 0\end{cases}$

Comme pour le premier exemple de la partie précédente (avec ± 3 et ± 8), il est relativement aisé de trouver la séquence permettant d'obtenir les vecteurs générateurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$: on peut fixer $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$, soit :

$$\begin{cases}2\times(-1) - 2\times(-1) + 1 - 0 = 1\\ (-1) - 1 + 2\times 1 + 2\times 0 = 0\end{cases}$$

Cela signifie que lorsque l'on utilise une fois le vecteur $\overrightarrow{u'_1}$ (soit $-1 \times \overrightarrow{u_1}$), une fois $\overrightarrow{u'_2}$ et une fois $\overrightarrow{u_3}$, on obtient un déplacement final d'une case vers la droite (Fig. 3).

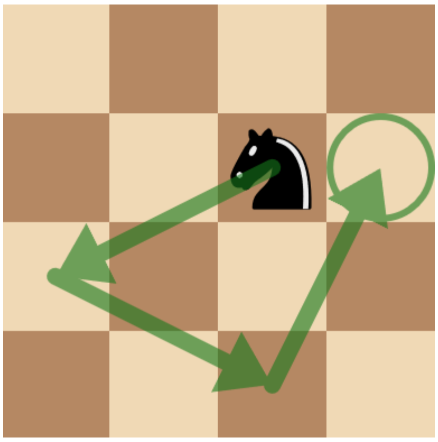

FIGURE 3 – Déplacement d'unce case vers la droite

Pour le vecteur $\overrightarrow{v_2}$, on cherche les solutions à l'équation suivante :

$$\alpha'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\beta'\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\gamma'\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\delta'\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}2\alpha'-2\beta'+\gamma'-\delta'=0\\\alpha'+\beta'+2\gamma'+2\delta'=1\end{cases}$$

Ici, on a, avec $\alpha'=0$, $\beta'=1$, $\gamma'=1$ et $\delta'=-1$:

$$\begin{cases}2\times 0-2\times 1+1+1=0\\0+1+2\times 1+2\times -1=1\end{cases}$$

Cela signifie que lorsque l'on utilise une fois le vecteur $\overrightarrow{u_2}$, une fois $\overrightarrow{u_3}$ et une fois $\overrightarrow{u_4'}$, on obtient un déplacement final d'une case vers le haut (Fig. 4).

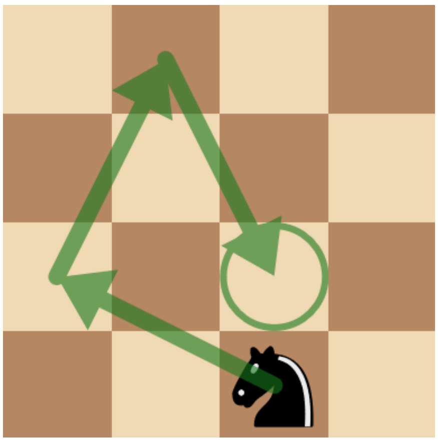

FIGURE 4 – Déplacement d'unce case vers le haut

Pour accéder à un point $P(x, y)$ avec x et $y \in \mathbb{Z}$, représentant une case de l'échiquier : il suffit de faire la somme des déplacements :

$$\overrightarrow{D_1} = x\left(-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{D_2} = y\left(0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$$

On a donc le vecteur $\overrightarrow{D}$ représentant le déplacement final jusqu'au point P :

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2} = \begin{pmatrix}x+0\\0+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

On peut par conséquent accéder à n'importe quel point du plan de coordonnées entières, caractérisant une case du plateau.

4.2.3 Avec des déplacements différents

Comme dans la première partie, on tente maintenant d'utiliser les chiffres 3 et 8 afin d'obtenir les vecteurs modélisant les déplacements du cavalier, comme suit :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix},\ \overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$$

On cherche les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3} + \delta\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{v_1} \ {}_{(1)} \\ \alpha'\overrightarrow{u_1} + \beta'\overrightarrow{u_2} + \gamma'\overrightarrow{u_3} + \delta'\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{v_2} \ {}_{(2)} \end{cases}$$

Pour l'équation ${}_{(1)}$, on cherche α, β, γ et $\delta \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\alpha\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 8\alpha - 8\beta + 3\gamma - 3\delta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta + 8\gamma + 8\delta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 24\alpha - 24\beta + 9\gamma - 9\delta = 3 \ \ L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 24\alpha + 24\beta + 64\gamma + 64\delta = 0 \ \ L_2 \leftarrow 8L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 48\alpha + 73\gamma + 55\delta = 3 \ \ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 24\alpha + 24\beta + 64\gamma + 64\delta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \delta = \dfrac{3-48\alpha-73\gamma}{55} \\ 24\alpha+24\beta+64\gamma+64\delta = 0 \end{cases}$$

On cherche donc un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3-48\alpha-73\gamma = 55k$. On fixe arbitrairement $k = 0$ afin d'ôter une variable et de réduire cette équation à une équation diophantienne à deux inconnues. On a donc : $48\alpha+73\gamma = 3 \iff 3(48x+73x) = 1$ avec $x = \frac{\alpha}{3}$ et $y = \frac{\gamma}{3}$. On trouve ainsi $48\times 35+73\times(-23) = 1$. En multipliant ces coefficients par 3, on a bien :

$$48\times 105+73\times(-69) = 3$$

Jusqu'ici, on a donc fixé : $\alpha = 105$ et $\gamma = -69$. On peut donc maintenant calculer :

$$\delta = \frac{3-48\alpha-73\gamma}{55} = 0$$

Pour obtenir la valeur de β, on utilise la première ligne du système :

$$8\alpha-8\beta+3\gamma-3\delta = 1 \iff 8\times 105-8\beta+3\times(-69)-3\times 0 = 1 \iff \beta = \frac{633}{8} = 79$$

On a donc :

$$105\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} + 79\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix} - 69\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Un calcul semblable permet d'obtenir le résultat suivant :

$$280\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} + 211\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix} - 184\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Pour accéder à un point de coordonnées (x, y) on utilise la même méthode que précédemment, car on dispose des mêmes vecteurs que dans le premier exemple.

4.3 Généralisation pour d'autres déplacements

4.3.1 Impossibilité de se déplacer partout avec des coordonnées impaires

On pose α et $\beta \in \mathbb{Z}$. Les déplacements du cavalier correspondants peuvent être représentés par les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}-\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$$

On pose à nouveau les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Afin que l'on puisse aller partout, les vecteurs doivent vérifier les égalités :

$$\begin{cases} a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3} + d\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{v_1} \ _{(1)} \\ a'\overrightarrow{u_1} + b'\overrightarrow{u_2} + c'\overrightarrow{u_3} + d'\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{v_2} \ _{(2)} \end{cases}$$

avec $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$.

On s'intéresse à l'équation $_{(1)}$, que l'on réécrit en faisant apparaitre les coordonnées des vecteurs :

$$a\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a\alpha - b\alpha + c\beta - d\beta = 1 \\ a\beta + b\beta + c\alpha + d\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a\alpha\beta - b\alpha\beta + c\beta^2 - d\beta^2 = \beta \ \ L_1 \leftarrow \beta L_1 \\ a\alpha\beta + b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\alpha^2 = 0 \ \ L_2 \leftarrow \alpha L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a\alpha\beta + c\alpha^2 + c\beta^2 + d\alpha^2 - d\beta^2 = \beta \ \ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ a\alpha\beta + b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$L_1 \Longleftrightarrow 2a\alpha\beta + c\alpha^2 + c\beta^2 + d\alpha^2 - d\beta^2 = \beta$$
$$L_1 \Longleftrightarrow 2a\alpha\beta + c(\alpha^2 + \beta^2) + d(\alpha^2 - \beta^2) = \beta$$

Etudions maintenant la parité de chacun des termes de l'équation : $2a\alpha\beta$ est un multiple de 2, et donc par définition pair. α et β étant par hypothèse impairs, α^2 et β^2 sont impairs, et $(\alpha^2 + \beta^2), (\alpha^2 - \beta^2)$ sont par conséquent pairs. Or, la multiplication d'un entier pair par un autre entier donne un entier également pair, indifféremment de la parité du deuxième nombre. Ces trois termes sont donc pairs pour n'importe quels coefficients $a, c, d \in \mathbb{Z}$. On a donc $2a\alpha\beta + c(\alpha^2 + \beta^2) + d(\alpha^2 - \beta^2)$ pair. Or, le résultat de cette addition, β, est impair par hypothèse, l'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Le cavalier ne peut donc se déplacer partout si on pose des vecteurs de coordonnées impaires, ou de même parité de manière générale.

Cela se traduit par ailleurs par une impossibilité de changer de couleur de case, la case sur laquelle se trouve le cavalier étant toujours de couleur identique à la case d'arrivée après un de ses mouvements. En effet, on considère un déplacement de coordonnées impaires, que l'on peut dissocier en un mouvement d'un nombre impair de cases horizontalement, puis verticalement (ou dans l'ordre inverse). Sur l'échiquier, les cases noires sont alternées avec les cases blanches verticalement et horizontalement, quand on se déplace d'un nombre impair de cases horizontalement, on arrive donc sur une case de couleur différente de la case de départ. Ensuite, on se déplace d'un nombre impair de cases verticalement, ce qui fait que l'on arrive sur une case de couleur différente de la case intermédiaire. On a donc subi deux inversions successives de la couleur de case, on arrive donc sur une case de la même couleur que la case de départ au terme de n'importe quel déplacement de coordonnées impaires.

Remarque : Dans le cas où on dispose d'un déplacement de coordonnées paires, le cavalier ne changera jamais de couleur de case non plus, car chaque mouvement conduira à une case de couleur identique à la case de départ (cette fois sans changement de couleur intermédiare).

4.3.2 Conjecture sur les conditions de déplacement sur toutes les cases

Nous avons ensuite tenté de réduire le problème bidimensionnel à deux problèmes unidimensionnels, se rapportant chacun au premier exemple. En effet, si l'on considère tout d'abord le déplacement horizontal du cavalier en négligeant le déplacement vertical, on ne peut, comme dans l'exemple 1, se déplacer sur toute une ligne que si les coordonnées horizontales des vecteurs sont premières entre elles.

De la même manière, si l'on considère uniquement le déplacement vertical du cavalier, on ne peut se déplacer verticalement sur toute la colonne uniquement si les coordonnées verticales des vecteurs sont premières entre elles.

Dès lors, on considère que, si les paramètres α et β des quatre vecteurs de déplacement précédemment posés sont premiers entre eux, alors on peut accéder à n'importe quelle ligne et à n'importe quelle colonne. *Cela ne signifie pas pour autant que l'on peut aller sur n'importe quelle case, car on ne peut pas forcément choisir la ligne ET la colonne simultanément.* On pourra par exemple choisir d'aller sur la $9^{\text{ème}}$ ligne mais être dans l'impossibilité de se rendre sur la $4^{\text{ème}}$ colonne tout en demeurant sur cette ligne

4.4 Conclusion

Nous avons donc tenté de distinguer les cas où le cavalier peut se déplacer sur tout l'échiquier, en partant des paramètres α et β utilisés pour caractériser les mouvements dont la pièce dispose. Nous émettons conséquemment une conjecture, étayée par le raisonnement précédent et les observations réalisées de manière empirique, mais non prouvée : Si les nombres α et β définis auparavant sont premiers entre eux et de parité différente [2], alors le cavalier peut se déplacer partout sur l'échiquier. [1] .

2. Les deux nombres ne peuvent être tous deux impairs comme démontré auparavant et deux nombres pairs sont par définition multiples de 2, il est donc impossible qu'ils soient premiers entre eux

5 Notes d'édition

[1] Cette conjecture est vraie. Les auteurs auraient pu la prouver avec des raisonnements analogues à ceux effectués sur les exemples traités. Donnons succinctement les grandes lignes d'une preuve. Avec les notations utilisées dans le texte il s'agit de voir que si par exemple α est pair et β impair, et qu'ils sont premiers entre eux, alors on peut trouver une solution en nombres entiers a, b, c, d au système

$$\begin{cases} \alpha(a-b)+\beta(c-d)=1 \\ \beta(a+b)+\alpha(c+d)=0 \end{cases}$$

et de manière analogue au système déduit de celui-ci par échange du 0 et du 1. Par le théorème de Bézout mentionné dans l'étude du premier problème l'équation $\alpha x+\beta y=1$ a des solutions entières. En outre x est défini à un multiple de β près et y à un multiple de α près. Comme β est supposé impair, on peut donc à notre guise fixer la parité de x qui nous convient et nous choisissons qu'il soit pair ; cela n'altèrera pas celle de y qui doit être toujours clairement impair. Quant à la deuxième équation, l'hypothèse que α et β sont premiers entre eux nous permet d'écrire que $a+b=k\alpha$ et $c+d=-k\beta$ pour un certain entier k. Ainsi, si $x_0,\ y_0$ est une solution de $\alpha x+\beta y=1$, avec x_0 pair, on est ramené à trouver des entiers a, b, c, d tels que

$$a-b=x_0,\ c-d=y_0,\ a+b=k\alpha,\ c+d=-k\beta.$$

Par somme et différence de la première et de la troisième équation on obtient que $2a=x_0+k\alpha$ et $2b=k\alpha-x_0$, qui ont bien chacune une solution entière a et b puisque x_0 est pair, et ce quel que soirt le choix de k. Maintenant le même traitement sur les deuxième et quatrième équations conduit à $2c=y_0-k\beta$ et $2d=-k\beta-y_0$. Cette fois, y_0 et β étant impairs, en choisissant k impair (par exemple $k=1$), on aura bien une solution entière c et une solution entière d.
Illustrons cela sur un exemple. Prenons $\alpha=12$ et $\beta=17$. On résout l'équation diophantienne $12x+17y=1$. Les solutions sont de la forme $x=-7+17n,\ y=5-12n,\ n\in\mathbb{Z}$. Comme nous souhaitons avoir x pair, choisissons $n=1$, auquel cas avec les notations ci-dessus on a $x_0=10$ et $y_0=-7$. Le système à résoudre en a, b, c, d est donc

$$a-b=10,\ c-d=-7,\ a+b=12,\ c+d=-17$$

qui conduit à la solution $a=11,\ b=1,\ c=-12,\ d=-5$ et on peut vérifier qu'il convient. En procédant de même on peut trouver sur cet exemple des coefficients pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ à savoir dans le même ordre : 5, 12, -1 et 11.