« Engrenages»

Année 2017-2018

Julien Chanoz, Erwan Beroud, Constance Suchel, élèves de 2nde

Encadrés par Mme Kroll et Mme Martinelli Bousquet

Lycée St Paul à Roanne (42300)

Nom du chercheur : M. Chardard (Jean Monnet à St Etienne)

1. Présentation du sujet

Voici le sujet proposé par notre chercheur :

Dents d'un engrenage

Quelle forme faut-il choisir pour les dents d'un engrenage sachant que :
- Il faut que les dents des deux roues entrent en contact
- Il faut que le contact soit constant entre les deux engrenages et que la vitesse de rotation soit constante pour les deux roues

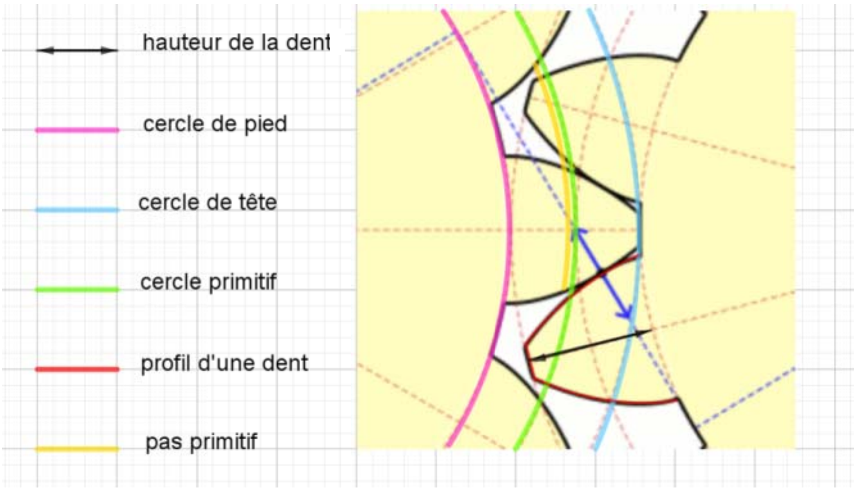
2. Annonce des conjectures et résultats obtenus :

On a conjecturé que le point T (contact entre les deux dents) se déplace sur une droite fixe lorsque l'engrenage est en marche. La trajectoire du point de contact T est une droite dans un repère orthonormé lié au sol. Dans un repère orthonormé lié au cercle de pied d'une roue, la trajectoire décrite par T est alors une développante de cercle.

Partie 1 : Recherches préliminaires

Etape 1 : Vocabulaire lié à un engrenage.

Pour commencer nous avons cherché à mieux comprendre le sujet et on a donc étudié le vocabulaire lié aux engrenages.



Les cylindres de friction fictifs remplacés par des roues dentées sont appelés **cylindres primitifs**. On appelle **cercle primitif** la section droite d'un cylindre primitif, son diamètre est le diamètre primitif. Pour construire un engrenage, on remplace les cylindres de friction par des roues dentées obtenues en taillant des cylindres de diamètres un peu plus grands appelés **cylindres de tête**. On appelle **cercle de tête** la section droite d'un cylindre de tête, c'est un cercle passant par le sommet des dents, son diamètre est le diamètre de tête. Dans cette même section droite, on appelle le **cercle de pied**, le cercle passant par le pied des dents, son diamètre est le diamètre de pied.

Etape 2 : Développante de cercle.

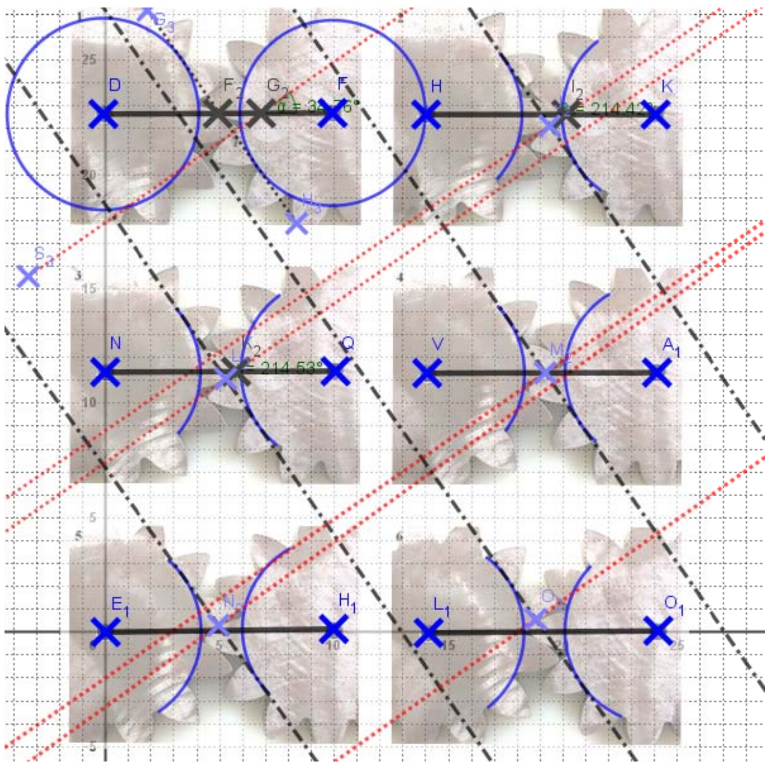
On a ensuite étudié le mouvement des engrenages à l'aide de différentes photos prises pendant le mouvement de deux roues.

Avec l'aide du logiciel GeoGebra, on a cherché le positionnement du point de contact entre les deux dents nommé T. On a également tracé les tangentes communes aux deux cercles de pied passant par T.

Finalement on a tracé les normales (droites perpendiculaires aux tangentes) qui passent par T.

On a pu conjecturer que le point T restait sur une même droite (en pointillés noirs).

On a aussi vu que l'angle formé par la normale (en rouge) et par le segment qui relie le centre des deux engrenages était toujours le même.



On a conjecturé que le point T (contact entre les deux dents) se déplace sur une droite fixe lorsque l'engrenage est en marche.

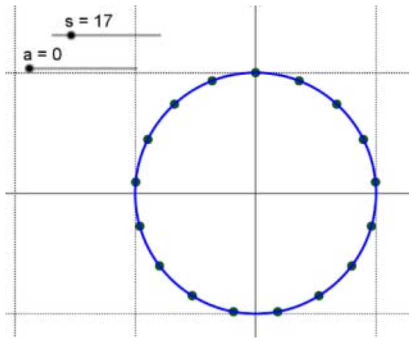
M. Chardard nous a guidés en nous proposant de nous intéresser aux développantes de cercle.

Définition :
La développante de cercle est la courbe dont les normales restent tangentes à un cercle fixe.
Plus concrètement, c'est la courbe que trace une main déroulant une bobine de fil tenue dans l'autre main.

Protocole de construction d'une développante de cercle sur le logiciel GeoGebra :

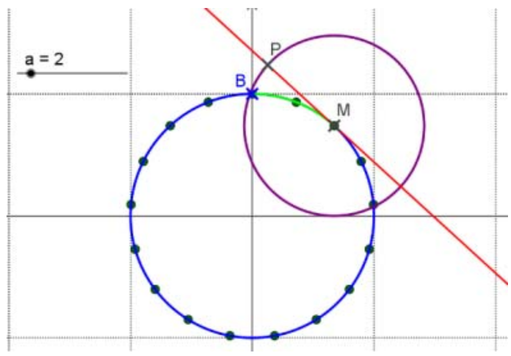
- On crée un cercle C

- On le divise en s arcs de même longueur à l'aide de points sur le cercle. On construit un point B sur le cercle et les suivants sont l'image de B par la rotation de centre O (centre du cercle) et d'angle $(2\pi/s)\times k$, pour k entier de 1 à s.



- On crée un curseur a (entier de 0 à s) et un point M qui se déplace sur le cercle sur les s points crées.

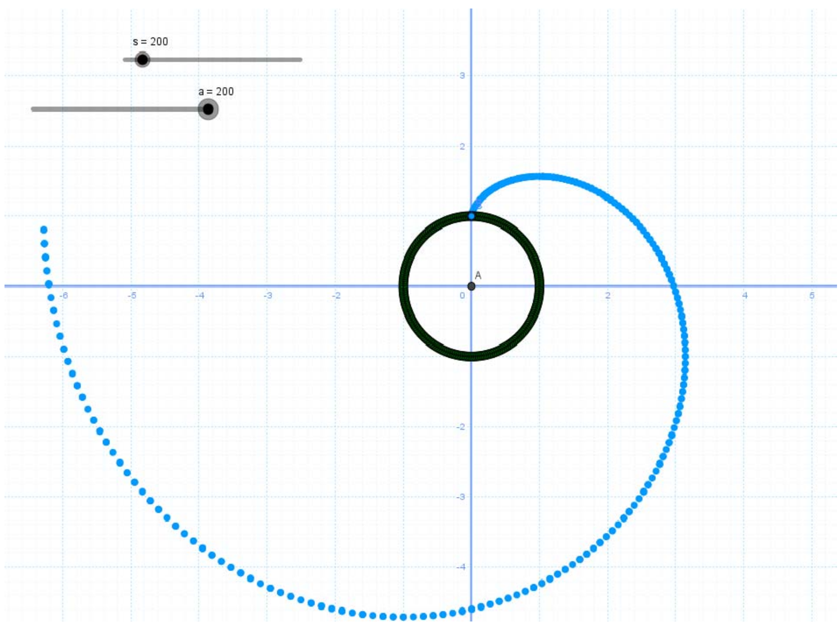
- On crée la tangente au cercle C qui passe par M.
- On trace un arc de cercle $\overset{\frown}{MB}$ et un cercle de centre M et de rayon $\overset{\frown}{MB}$.



- P est le point d'intersection le plus proche de B du cercle et de la tangente.

- On fait « afficher la trace » pour le point P et on fait bouger la variable a.

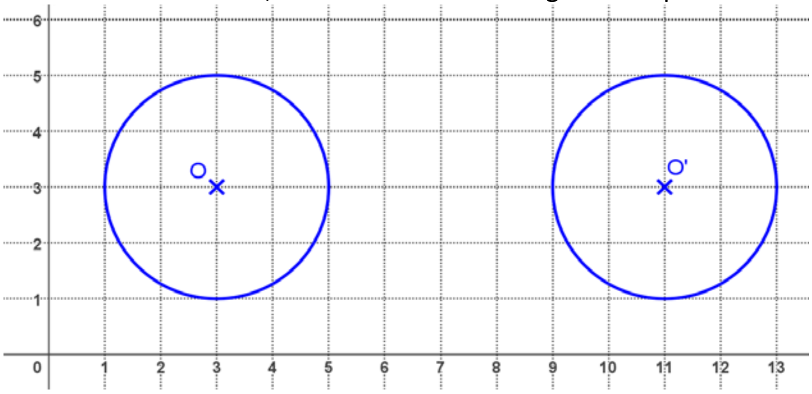
La trace de ce point P décrit une développante de cercle



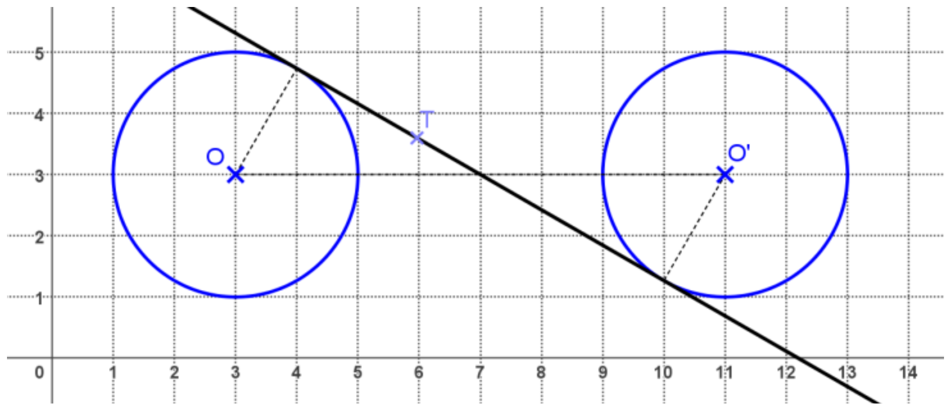
Partie 2 : Recherche mathématique

Etape 1 : La trajectoire du point de contact T dans un repère orthonormé.

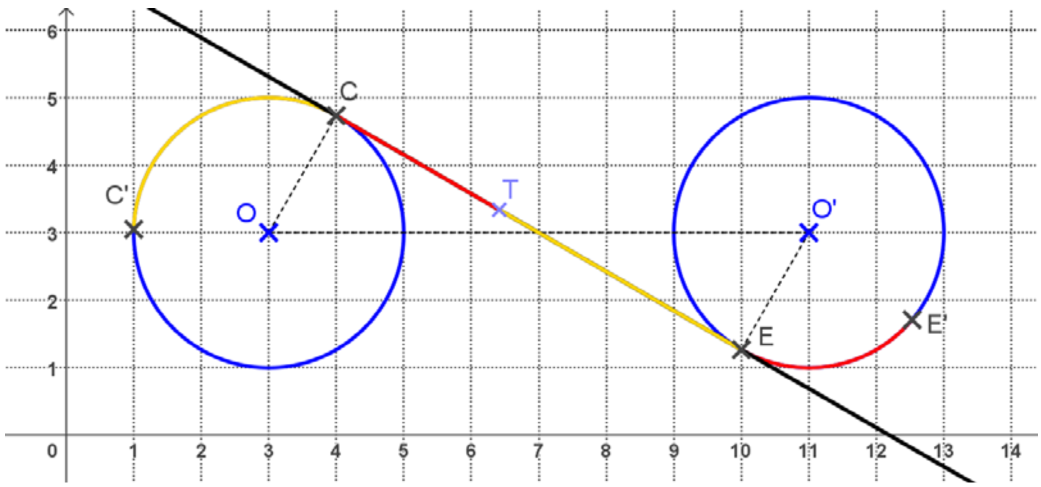
Imaginons les deux roues d'un engrenage sans leurs dents.
On considère les cercles de base des deux roues.
A partir de ces deux cercles et de nos recherches, déterminons la forme géométrique des dents de l'engrenage.



D'après nos observations d'un engrenage en mouvement (sur photos et logiciel), on a conjecturé que le point de contact entre les deux dents noté T, se déplace sur une droite fixe (la normale) qui passe par le milieu de [OO'] et est tangente aux 2 cercles :



La trajectoire du point de contact T est une droite dans ce repère orthonormé.



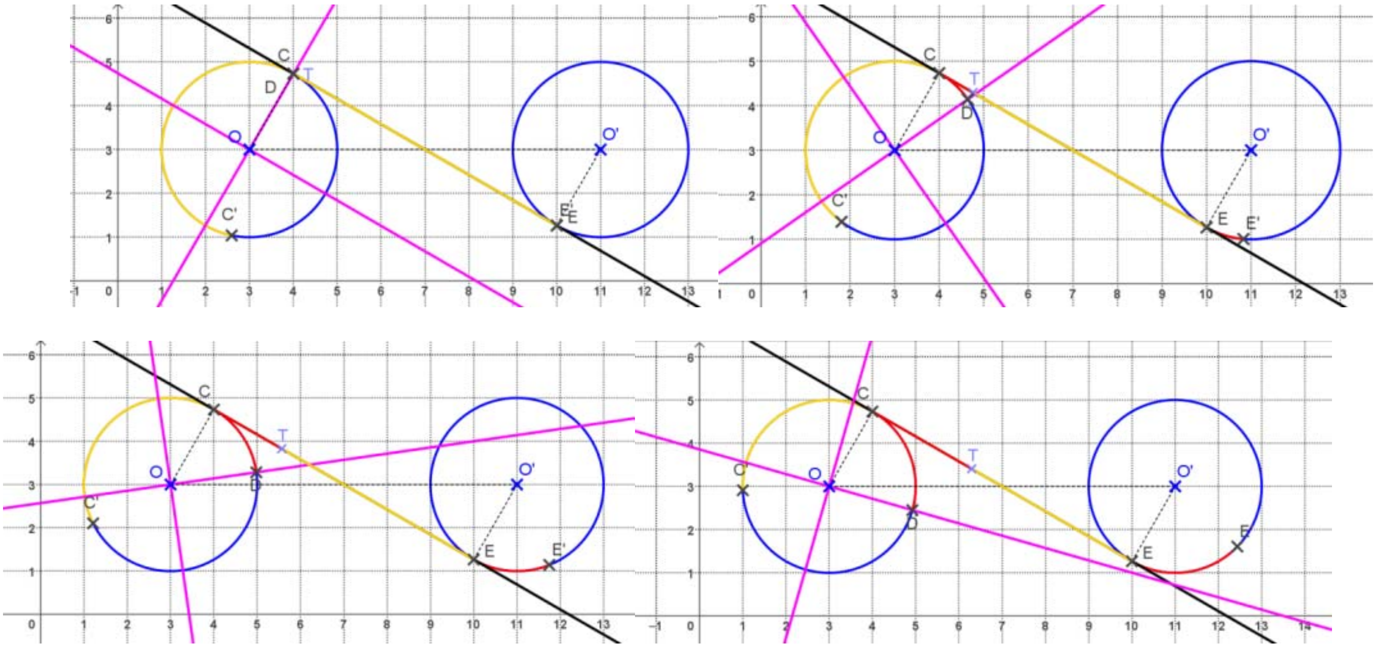
Nous avons construit une figure sur un logiciel de géométrie dynamique, GeoGebra.

Sur cette figure, quelle que soit la position de T (que l'on peut déplacer) sur [CE], la longueur CT est égale à celle de $\overset{\frown}{EE'}$ et la longueur TE est égale à celle de $\overset{\frown}{CC'}$.

Cette construction sur figure animée permet de représenter les égalités de longueurs lors du mouvement des roues que l'on avait d'abord manipulées à l'aide de bricolages.

Etape 2 : La trajectoire de T dans un repère lié à la première roue.

Si l'on se place dans un repère lié au premier cercle et que l'on imagine les roues en mouvement (les axes des abscisses et ordonnées tournent en même temps que les roues).



Dans le repère lié au cercle :

- la trajectoire de T n'est plus une droite.

- La droite (CE) n'est plus fixe, c'est une tangente au cercle qui se déplace (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre)

- la longueur CT correspond à celle d'un fil $\overset{\frown}{CD}$ qu'on déroulerait

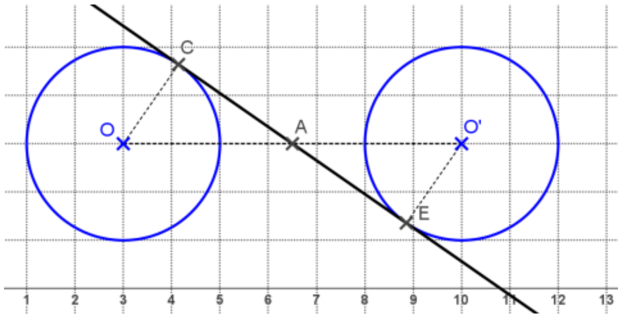
La trajectoire décrite par T dans le repère lié au 1^er^ cercle est alors une développante de cercle [(1)]

Nous avons construit une figure animée pour représenter le repère en mouvement et les égalités de longueurs CT et $\overset{\frown}{CD}$ lors du mouvement des roues.

Ce travail nous permet de comprendre que le point T décrit par rapport au premier cercle une développante de cercle. Or le point T correspond au point de contact qu'il y a entre les deux dents, et décrit par conséquent le profil d'une dent de la roue.

Ainsi le profil d'une dent est associé à une développante de cercle que l'on peut déterminer.

Etape 3 : Schéma de deux dents d'engrenage en contact à partir des cercles de base.



Nous souhaitons tracer les deux développantes qui représenteraient la moitié des profils des deux dents en contact. On suppose le contact sur [OO'] au départ.
Déterminons leur point de départ respectif D et D' sur leur cercle de base pour qu'elles soient en contact en A. Pour cela il faut calculer les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{AO'D'}$ en utilisant des règles de trigonométrie.

Nous savons que $\overset{\frown}{CD}$ = CA. Déterminons la longueur CA. On note $\alpha = \widehat{AOC}$.

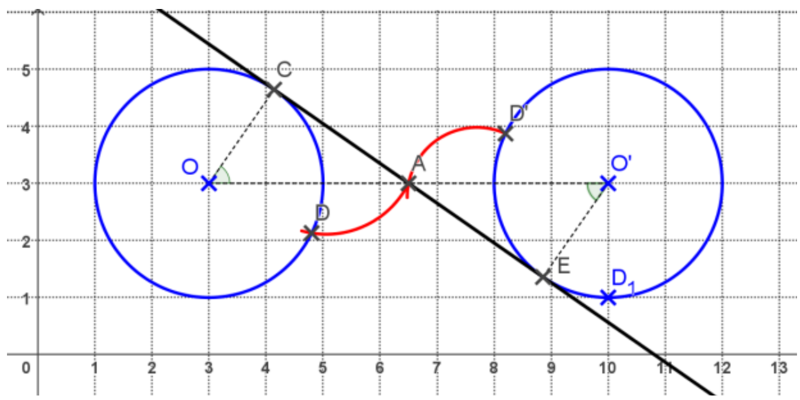
Dans le triangle OAC rectangle en C, on a : $\tan\alpha = \dfrac{CA}{OC} = \dfrac{CA}{\text{rayon}}$. Ainsi $\boxed{CA = \text{rayon} \times \tan\alpha}$

On utilise la règle de trigonométrie suivante (donnée par un professeur):
La longueur d'un arc sur le cercle est égale au produit du rayon par l'angle au centre associé en radians.

Ainsi $\boxed{\overset{\frown}{CD} = \widehat{COD} \text{ (en radians) x rayon}}$ et $\widehat{COD} = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{\text{rayon}} = \dfrac{CA}{\text{rayon}} = \dfrac{\text{rayon} \times \tan\alpha}{\text{rayon}}$

d'où $\widehat{COD} = \tan\alpha$ et par conséquent $\widehat{AOD} = \widehat{COD} - \alpha$. On obtient: $\boxed{\widehat{AOD} = \tan\alpha - \alpha}$

On peut maintenant construire sur le fichier précédent (figure du début de l'étape 3) les points D et D' puis les développantes de cercle associées.

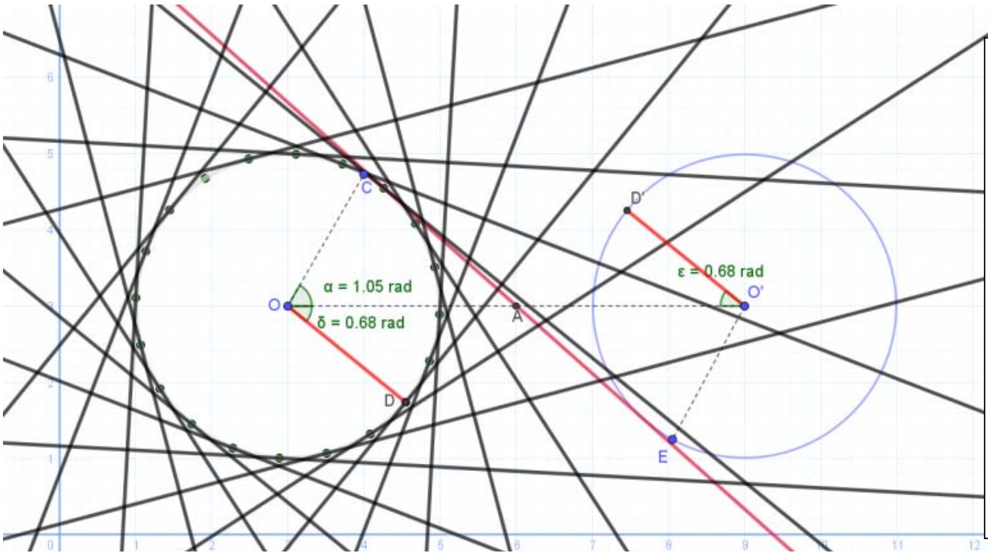


1- On construit le point D comme suit :

On crée l'angle $\alpha = \widehat{AOC}$ puis A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.
Ensuite D est l'intersection du cercle avec [AA'].

2- On construit la développante de cercle comme suit :

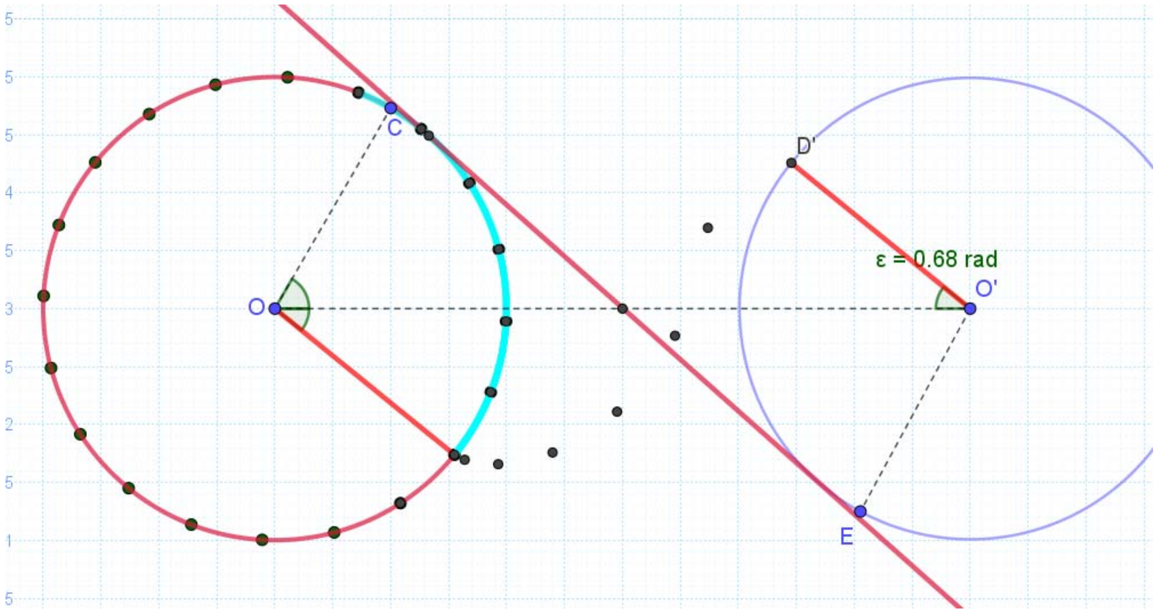
- On partitionne le cercle en 20 arcs (plus le nombre d'arcs est grand et plus les points de la construction de la développante seront nombreux) de même mesure.
- On trace les tangentes au cercle passant par les points construits.
- On reporte la longueur d'arc entre D et chaque point du cercle sur les tangentes associées.
- On obtient des points de la développante de cercle.



P_1 est le premier point de la partition du cercle à partir de D.

On trace l'arc $D\overset{\frown}{P_1}$ pour obtenir sa longueur e et le cercle de centre P_1 et de rayon e.
Le point F est l'intersection de ce cercle et de la tangente passant par P_1.

F est le premier point de la développante de cercle que l'on trace.



3. Conclusion

Nous sommes satisfaits d'avoir pu mener des recherches dans le cadre de cet atelier cette année. Nous remercions nos professeurs et M. Chardard de nous avoir accompagnés et encouragés.

Note d'édition

(1) On retrouve en effet la définition donnée en partie 1 étape 2, avec T qui joue le rôle de P, D qui joue le rôle de B, et C qui joue le rôle de M.