Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Décrochage de décorations

Année scolaire 2016- 2017

Niveaux, Prénoms et Noms des élèves :

6ème : Owen PRIGENT-LALAA, Rayan WILLIAMSON, Anthony THION

5ème : Adélie SERAFINI, Rosalie SERRE, Milo ALDROVANDI, Vianney DE LAMARZELLE, Adlene METNANI, Maryline PROST, Anouk FERRER, Iliana FUENTES, Esther AUBIN-LEONI, Willy PAUSE, Nael DEROUICH, Noé TERRON.

4ème : Hanny DAHER HASSAN, Zoé MAISTRE, Laetitia GOUZOWSKY, Justine CAIRONI, Alice BEGIN, Alicia LOGRASSO

Établissement :
Collège des Gratte-Ciel Morice Leroux, Villeurbanne

Enseignantes :
Natalie Jacotey, Christel Bouvier

Chercheurs :
Daniel Hirschkoff, Sebastian Barbieri, Bertrand SIMON, Matthieu ROSENFELD, Simon CASTELLAN ENS Lyon

Présentation du sujet

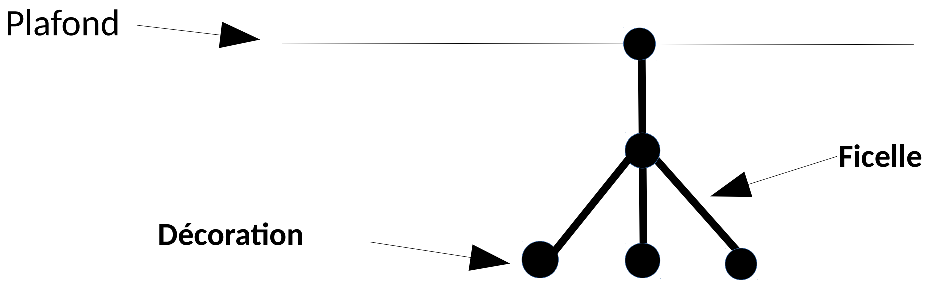
<u>Notre problématique</u> :

Nous avions plusieurs figures à étudier, chacune composée d'un nombre indéfini de ficelles.

Pour chaque figure, deux joueurs enlèvent une ficelle chacun à son tour, le perdant est celui qui enlève la dernière ficelle.

Il s'agit de déterminer une stratégie gagnante.

Partie 1: Règles du jeu



Dans ce jeu, nous avons des décorations reliées entre elles par des ficelles.
Une ficelle au moins est accrochée au plafond. Ce dernier est symbolisé par une ligne horizontale.

Règles du jeu : **[1]**

Chaque joueur, à son tour, enlève une ficelle.

Le but du jeu est de ne pas enlever la dernière ficelle en sachant que si un joueur enlève une ficelle, celles qui ne sont reliées qu'à elle par dessous tombent également.

Le perdant est celui qui enlève la dernière ficelle.

Il y a deux types de configurations :

- **La configuration A** : c'est lorsque le 1er joueur a une stratégie gagnante quels que soient les coups joués par le joueur 2.

- **La configuration B** : c'est lorsque le 2ème joueur a une stratégie gagnante quels que soient les coups joués par le joueur 1.

Dans notre article, nous noterons J1 la personne qui joue 1ère et J2 la personne qui joue 2ème.

Voici le lien vers un **programme Scratch** qui explique les règles du jeu :

https://scratch.mit.edu/projects/162385078/

Partie 2 : Résultats obtenus

Lemme fondamental :

Si dans une configuration on ne peut enlever qu'une seule ficelle à la fois, alors :
- si le nombre de ficelles est pair, c'est une configuration A
- si le nombre de ficelles est impair, c'est une configuration B

Preuve :
Un nombre pair de ficelles est constitué d'un nombre entier de paires de ficelles ; pour chaque paire de ficelles, le joueur 1 gagne forcément (il enlève celle du bas, et J2 enlève celle du haut). Donc, pour n paires de ficelles, le joueur 1 gagne toujours. C'est une configuration A.

Pour un nombre impair, c'est donc forcément le joueur 2 qui gagne. C'est une configuration B.

1. Les lustres

Nous avons étudié quatre familles de lustres que nous définissons ci-dessous.

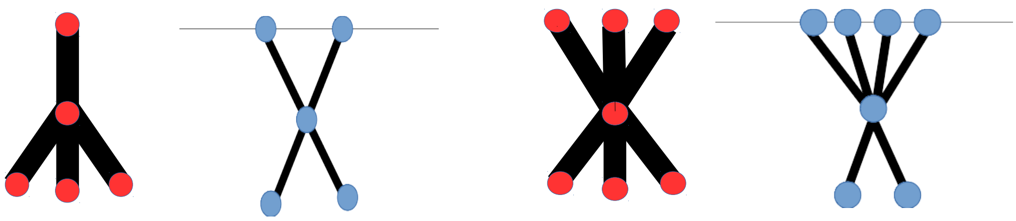
Définition : Les lustres simples (LS) ont une ficelle reliée au plafond par le sommet du plafond. Les autres ficelles sont toutes attachées à cette ficelle-là et seulement à celle-là. Le sommet commun à toutes les ficelles est le sommet central.

Définition : Les lustres bien accrochés (LBA) sont des lustres simples ayant une ficelle supplémentaire qui a un sommet au plafond, l'autre sommet étant le sommet central.

Définition : Les lustres très bien accrochés (LTBA) ont trois ficelles accrochées au plafond.

Définition : Les lustres très très bien accrochés (LTTBA) ont quatre ficelles accrochées au plafond.

Exemples :



LS **LBA** **LTBA** **LTTBA**

Théorème: Si le nombre de ficelles d'un lustre est pair, alors c'est une configuration A.
Si le nombre de ficelles d'un lustre est impair, alors c'est une configuration B.

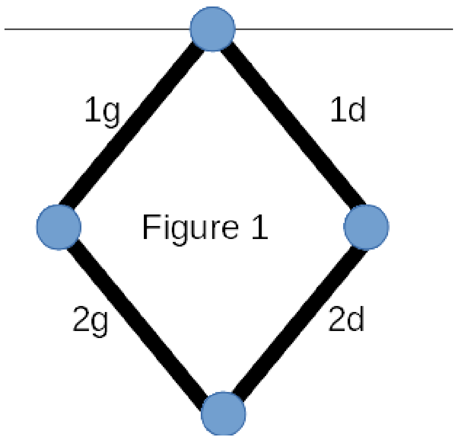
Preuve :

Comme le joueur joue intelligemment, il ne va jamais enlever la seule ficelle accrochée au plafond.
Pour toutes les autres ficelles, on ne peut enlever qu'une ficelle à la fois.
On peut donc appliquer le Lemme fondamental, ce qui prouve le théorème.

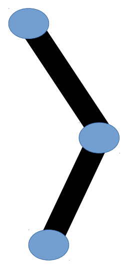
2. Les losanges

a. Le losange

Définition : un losange est une décoration qui est accrochée par un sommet au plafond. Un losange est constitué de 2 doubles ficelles dont une des extrémités est le sommet du plafond et l'autre extrémité est le sommet commun.



Double ficelle :



Théorème : le losange est une configuration B.

Preuve :

Remarque : « resp. » signifie « respectivement ».

- Si J1 enlève 2g (resp. 2d), alors J2 enlève 1d (resp. 1g) et J1 enlève la dernière 1g (resp. 1d). Donc J1 a perdu.
- Si J1 enlève 1g (resp. 1d), alors J2 enlève 2d (resp. 2g) et J1 enlève la dernière 1d (resp. 1g). Donc J1 a perdu.

Donc, puisque J2 gagne à chaque fois, le losange est forcément une configuration B.

Programme Scratch :

Voici le lien vers une programme Scratch qui permet de jouer sur la configuration du losange :

https://scratch.mit.edu/projects/162385078/

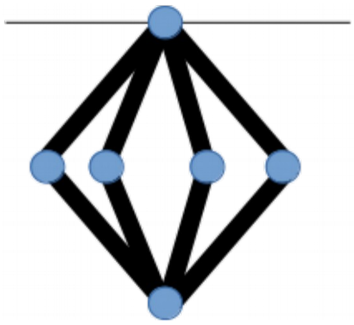
b. Le losange à n doubles ficelles

Définition : un losange à n doubles ficelles est constitué de n doubles ficelles dont une des extrémités est le sommet du plafond et l'autre extrémité est le sommet commun.

Cas particulier : le losange défini précédemment est un losange à deux doubles ficelles.

Exemple :

losange à quatre doubles ficelles :



Théorème : le losange à n doubles ficelles est une configuration B.

Preuve : Preuve par récurrence :

- Initialisation : Nous avons démontré plus haut que le losange est une configuration B.
- Hérédité : Supposons qu'un losange à n doubles ficelles soit une configuration B.
  On considère un losange à n+1 doubles ficelles :

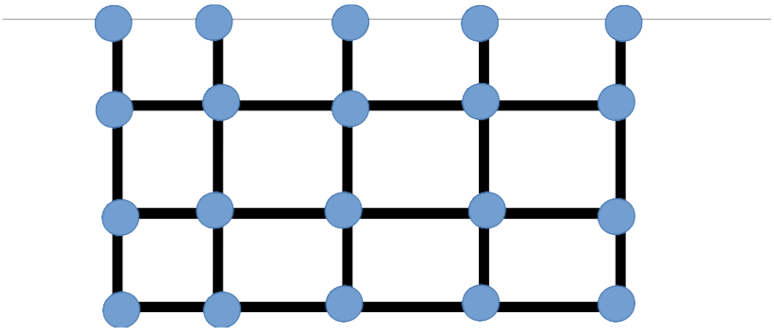
- Si J1 enlève la ficelle accrochée au plafond d'une double ficelle alors J2 enlève le reste de la double ficelle (c'est celle qui est accrochée au sommet central)
- Et si J1 enlève la ficelle accrochée au sommet central d'une double ficelle alors J2 enlève le reste de la double ficelle (c'est celle qui est accrochée au plafond)

Dans les deux cas, il reste un losange à n doubles ficelles qui est une configuration B. Comme c'est au tour de J1 de jouer sur une configuration B, il va perdre.

Nous avons démontré que le losange à n doubles ficelles est une configuration B.

3- Les grilles

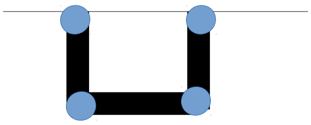
Voici une grille entière :



Nous avons travaillé sur plusieurs parties de la grille car la grille entière est trop compliquée.

a. La grille simple

Nous avons commencer à travailler sur cette figure, appelée grille simple :



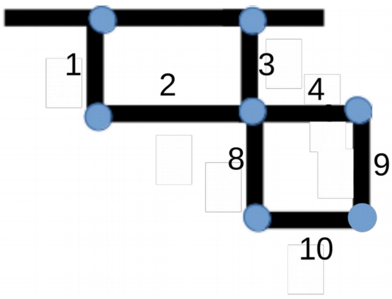
Théorème : La grille simple est une configuration B.

Preuve :

La grille simple comporte un nombre impair de ficelles qu'on ne peut enlever qu'une par une.
On applique donc le Lemme fondamental, ce qui prouve que c'est une configuration B.

b. La grille double

Après la grille simple, nous avons travaillé sur la partie de la grille ci-dessous, appelée la grille double.



Théorème : La grille double est une configuration B.

Preuve :
Nous avons étudié toutes les possibilités de jouer pour J1, et nous avons trouvé que, à chaque fois, J2 pouvait trouver une manière de gagner.

Toutes les possibilités de jeu pour J1 sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Joueur 1	Joueur 2	Joueur 1	Joueur 2	Joueur 1	Conclusion
9 (resp. 10)	10 (resp. 9)	8 (resp. 4)	4 (resp. 8)	J1 joue 1er sur la grille simple (conf. B)	J1 perd
		1	J2 joue 1er sur le lustre à 4 ficelles(conf. A) J2 gagne		J1 perd
		2	3	il ne reste que la ficelle 1	J1 perd
		3	2	il ne reste que la ficelle 1	J1 perd
4 (resp. 8)	8 (resp. 4)	J1 joue 1er sur la grille simple (conf. B)			J1 perd
2	3	Il ne reste que la ficelle 1			J1 perd
3	2	Il ne reste que la ficelle 1			J1 perd
1	2	4 (resp. 8)	8 (resp. 4)	il ne reste que la ficelle 1	J1 perd
		10 (resp. 9)	9 (resp.f 10)	J1 joue 1er sur le lustre à 3 ficelles (conf. B) J2 gagne	J1 perd

Merci pour votre lecture attentive.

Notes d'édition :
[1] Ce jeu est une variante du jeu de Hackenbush, inventé par le mathématicien anglais John Conway.