# Découper puis redécouper !

**Année 2015- 2016**

Eddie CHAMANT, Solène GEOFFROY-REDEL, Lisa HUBERT, Alizée SCHOUMACHER, élèves de 6ème
Mélanie GARDEUX, élève de 5ème

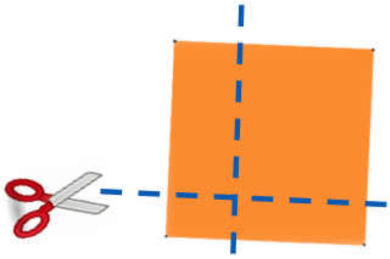
Lorraine BERGEOT, Adèle CLAUDEPIERRE, Clara NOIRET, Clara VEGA, élèves de 4ème

Etablissement : Collège George CHEPFER, Villers-lès-Nancy

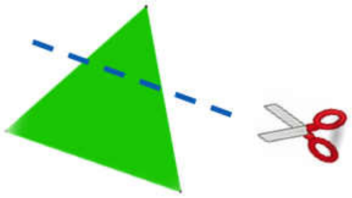
Enseignants : Mme HIRIART et M. FINDIK

Chercheuse : Irène MARCOVICI, Institut Elie Cartan, Université de Lorraine

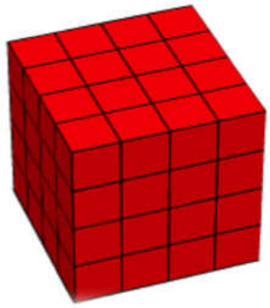
## Sujet



- Partition du carré en m carrés n'ayant pas forcément les mêmes dimensions à l'aide d'une paire de ciseaux. Quelles sont les valeurs possibles de m ?



- Partition du triangle équilatéral en n triangles équilatéraux n'ayant pas forcément les mêmes dimensions à l'aide d'une paire de ciseaux. Quelles sont les valeurs possibles de n ?



- Partition du cube en p cubes n'ayant pas forcément les mêmes dimensions. Quelles sont les valeurs possibles de p ?

**Sommaire :**

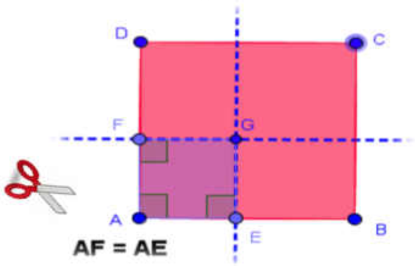
**Résultats :**

1°) On peut faire une partition d'un carré en m petits carrés pour tout entier m à l'exception de 2, 3 et 5.
2°) Comme pour le carré, on peut faire une partition d'un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux pour tout entier n à l'exception de 2, 3 et 5.
3°) On a démontré que l'on peut découper un cube en p cubes pour tout entier p supérieur ou égal à 48, et aussi pour quelques valeurs inférieures à 48.

**Développement :**

## 1°) Pour quels entiers m peut-on découper le carré initial en m petits carrés ?

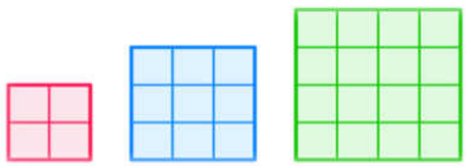
Remarque :
Il est clair que les traits de coupe doivent tous être parallèles à l'un des côté du carré initial, sinon il faudrait recoller des morceaux pour en faire des carrés.




ABCD est un carré.
Les traits de coupe sont parallèles aux côté de ABCD, donc (GE) // (AD) et (FG) // (AB)
Alors AEGF a 3 angles droits, donc c'est un rectangle.
Les traits de coupe sont aussi tels que AF = AE donc le rectangle AEGF a aussi 2 côtés consécutifs de même longueur, c'est donc bien **un carré.**

**Nos résultats :**

**● On peut découper un carré en m carrés lorsque m est le carré d'un nombre entier.**



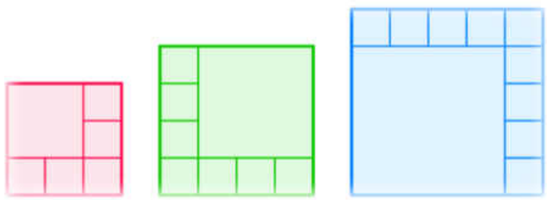
**m = 4** **m = 9** **m = 16**

Ci-contre, on a des partitions du carré en :
- 4 carrés ; $4 = 2^2$
- 9 carrés ; $9 = 3^2$
- 16 carrés ; $16 = 4^2$

Les petits carrés de chaque partition sont de même dimension.

Remarque : **m =1**=$1^2$ convient aussi, cela signifie qu'on ne découpe pas.

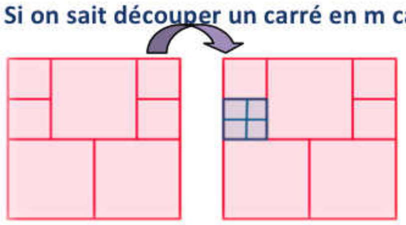
**● On peut découper un carré en m carrés lorsque m est un entier pair supérieur ou égal à 6.**



**m = 6** **m =8** **m = 10**

Ci-contre, on a des partitions du carré en 6, 8 et 10 carrés.
Pour un découpage d'un carré en n carrés où n est pair supérieur ou égal à 6, on découpe n/2 carrés de même dimension sur deux côtés consécutifs du carré initial.

**● Si on sait découper un carré en m carrés alors on sait le découper en m + 3 carrés.**



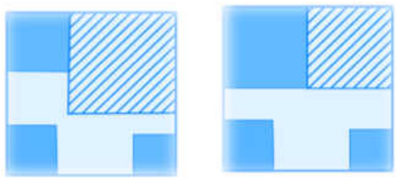
**m = 7** **m = 10**

Ci-contre, on a une 1ère partition du carré en 7 petits carrés. On redécoupe un petit carré de la partition en 4, on obtient une partition du carré en 10 carrés car 7 – 1 + 4 = 7 + 3 = 10
Il suffit donc de redécouper un des petits carrés d'un premier découpage en 4 pour augmenter le nombre total de carrés de 3.

**• Chaque sommet du carré initial appartient forcément à un petit carré du découpage.**
Comme le carré initial a 4 sommets, il ne peut y avoir de découpage en 2 ou 3 carrés, donc **$m \neq 2$** et **$m \neq 3$**.

**• On ne peut pas faire une partition du carré en 5 carrés.**
On place tout d'abord un carré à chaque sommet du carré initial. Il y a 3 possibilités.

▪ Les 4 carrés à chaque sommet n'ont pas de points communs.
La partie restante en plus clair n'est pas un carré.

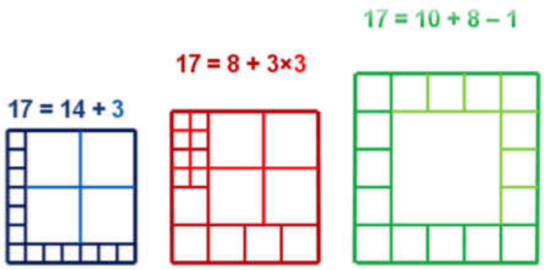


▪ 2 des petits carrés ont un côté ou une partie de côté en commun.
La partie restante en plus clair n'est pas un carré.

▪ 3 des petits carrés ont un côté ou une partie de côté deux à deux en commun.
La partie restante en plus clair n'est pas un carré.

On a donc **$m \neq 5$**.

**• Une partition d'un carré en m carrés n'est bien évidemment pas unique.**




Par exemple pour une partition en 17 :
-on fait une partition en 14 (pair) puis on redécoupe un des carrés de la partition en 4.
-on fait une partition en 8 (pair) et on redécoupe 3 petits carrés de la partition en 4.
-on fait une partition en 10 (pair) et on redécoupe un des carrés de la partition (le plus grand) en 8 (pair).

<u>Récapitulatif :</u> **Partition d'un carré en m carrés**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | Etc. | | | | |

On sait faire une partition du carré en m carrés pour :
- **▪ m est le carré d'un entier**
- **▪ m est un entier pair supérieur à 6**
- **▪ si m convient alors m+3 convient**
- **▪ $m \neq 2$, $m \neq 3$ et $m \neq 5$**

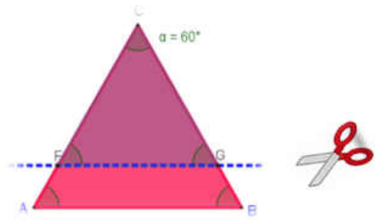
Comme :
- on sait faire une partition du carré en 6, 7 ou 8 carrés,
- 6, 7 et 8 sont 3 entiers consécutifs,
- si on sait faire une partition en m carrés, on sait aussi faire une partition en m + 3 carrés,

on sait faire des partitions du carré pour tout m supérieur ou égal à 6.

**On peut donc faire une partition d'un carré en m carrés pour m égal à 4 ou bien tout entier m supérieur ou égal à 6.**

**2°) Pour quels entiers n peut-on découper le triangle équilatéral initial en n petits triangles équilatéraux ?**

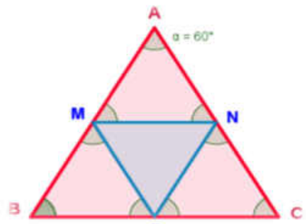
**Remarque :**
Les traits de coupe sont aussi tous parallèles à l'un des côté du triangle équilatéral initial, pour obtenir une partition du triangle en des triangles équilatéraux.




ABC est un triangle équilatéral, ses 3 angles mesurent 60°.
Le trait de coupe est parallèle au côté [AB] donc (FG) // (AB).

Donc les angles correspondants $\widehat{CFG}$ et $\widehat{CAB}$, ainsi que $\widehat{CGF}$ et $\widehat{CBA}$ ont la même mesure.
Donc les 3 angles du triangle CFG mesurent 60°.

## Partition en 4 triangles équilatéraux




ABC est équilatéral, ses 3 angles mesurent 60°.
M, N et P sont les milieux des côtés du triangle ABC.
(MN) // (BC), (NP) // (AB) et (MP) // (AC) donc les 3 triangles AMN, BMP et CNP sont donc équilatéraux (tous leurs angles mesurent 60°).
Les 3 angles du triangle MNP mesurent aussi alors chacun 60°, ils sont égaux à 180° – 2 × 60° = 60°.
MNP est donc bien un **triangle équilatéral**.

**Nos résultats :**

**● On peut découper un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux lorsque n est le carré d'un nombre entier.**

**$n = 1$**

**$n = 1 + 3$**
**$n = 4 = 2^2$**

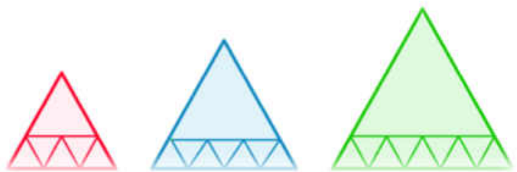
**$n = 1 + 3 + 5$**
**$n = 9 = 3^2$**

**$n = \overbrace{1 + \underbrace{3 + 5} + 7}$**
**$n = 8 + 8 = 16$**
**$n = 16 = 4^2$**

**$n = \overbrace{1 + \underbrace{3 + 5 + 7} + 9}$**
**$n = 10 + 10 + 5$**
**$n = 25 = 5^2$**

On constate ici que la somme des k premiers nombres impairs est égale à $k^2$, pour k entier inférieur ou égal à 5.

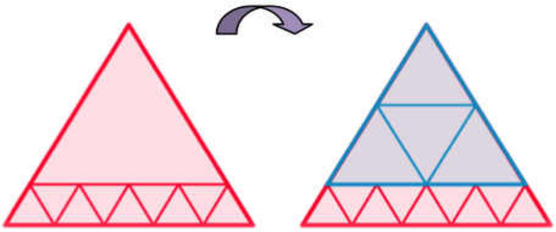
**● On peut découper un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux lorsque n est un entier pair supérieur ou égal à 6.**



**n = 6** **n = 8** **n = 10**

Ci-contre, on a des partitions du triangle équilatéral en 6, 8 et 10 triangles équilatéraux.
Pour un découpage d'un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux où n est pair supérieur ou égal à 6, on découpe n - 1 petits triangles équilatéraux de même dimension sur un côté du triangle équilatéral initial comme sur les figures en partageant le côté de ce triangle en n/2.

**• Si on sait découper un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux alors on sait le découper en n + 3 triangles équilatéraux.**



**n = 10** **n = 13**

Ci-contre, on a une 1ère partition du triangle équilatéral en 10 triangles équilatéraux. On redécoupe un petit triangle de la partition en 4 triangles équilatéraux, on obtient une nouvelle partition en 13 triangles équilatéraux puisque
$10 - 1 + 4 = 10 + 3 = 13$.

Il suffit donc de redécouper un petit triangle équilatéral d'un premier découpage en 4 pour augmenter le nombre total des triangles équilatéraux de 3.

**• Chaque sommet du triangle équilatéral initial appartient à un petit triangle équilatéral du découpage.**
Comme le triangle initial a 3 sommets, il ne peut y avoir de découpage en 2 triangles, donc **$n \neq 2$**
Si on place un triangle en chaque sommet du triangle initial, donc 3 triangles équilatéraux, on a vu qu'il y a un 4ème triangle équilatéral au milieu, donc **$n \neq 3$**.

**• On ne peut pas faire une partition du triangle équilatéral en 5 triangles équilatéraux.**
On place tout d'abord un triangle équilatéral à chaque sommet du triangle initial. Il y a 3 possibilités.

▪ Les 3 petits triangles ont 2 à 2 un sommet commun : on obtient la partition en 4 triangles et non pas 5 !

▪ Deux des petits triangles ont un sommet commun :
Le pentagone restant ne peut être partagé en 2 triangles, il a trop de côtés.

▪ Les 3 petits triangles n'ont aucun sommet commun : l'hexagone restant ne peut être partagé en 2 triangles, il a trop de côtés.

On a donc **$n \neq 5$**

<u>Récapitulatif :</u> **Partition d'un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | Etc. | | | | |

On sait faire une partition du triangle équilatéral en n triangles équilatéraux pour :
- **n est le carré d'un entier**
- **n est un entier pair supérieur à 6**
- **si n convient alors n+3 convient**
- **$n \neq 2$, $n \neq 3$ et $n \neq 5$**

On a exactement les mêmes résultats que pour la partition du carré en carrés.

**On peut donc faire une partition d'un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux pour n égal à 4 ou bien tout entier n supérieur ou égal à 6.**

### 3°) Pour quels entiers p peut-on découper le cube initial  en p petits cubes?

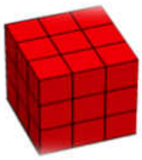
**Remarque :**
Les plans de coupe sont tous parallèles à l'une des faces du cube, pour obtenir une partition du cube en des petits cubes.

**Nos résultats :**

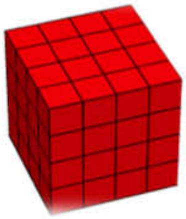
**• Chaque sommet du cube initial appartient à un petit cube du découpage.**
Comme le cube initial a 8 sommets, il ne peut y avoir de découpage en 2, 3, 4, 5, 6 et 7 cubes, donc **p ≠ 2**, **p ≠ 3**, **p ≠ 4**, **p ≠ 5**,  **p ≠ 6** et **p ≠ 7**.

**• On peut découper un cube en p cubes lorsque p est le cube d'un nombre entier.**

**p = 8**



**p = 27**

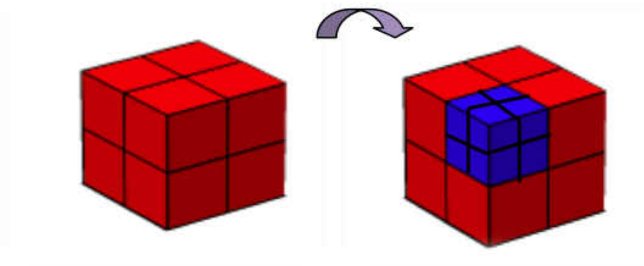


**p = 64**

Ci-contre, on a des partitions du cube en :
- 8 cubes ; $8 = 2^3$
- 27 cubes ; $27 = 3^3$
- 64 cubes ; $64 = 4^3$

Les petits cubes de chaque partition sont de même dimension

**• Si on sait découper un cube en p cubes alors on sait le découper en p + 7 cubes.**



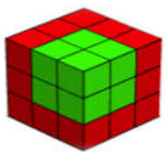
**p = 8** **p = 15**

Ci-contre, on a une 1ère partition du cube en 8 cubes. On redécoupe un petit cube de la partition en 8 cubes, on obtient une nouvelle partition en 15 cubes car 8 – 1 + 8 = 8 + 7 = 15.
Il suffit donc de redécouper un petit cube d'un premier découpage en 8 cubes pour augmenter le nombre total des cubes de 7.

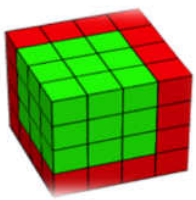
▪ 8 + 7 = 15, 15 + 7 = 22, 22 +7 = 29, 29 + 7 = 36, 36 + 7 = 43, 43 + 7 = 50, etc.
On sait découper un cube en 8 cubes, donc on sait  le découper en **15, 22, 29, 36, 43, 50 cubes**, etc., en redécoupant à chaque fois un petit cube de la dernière partition en 8.

▪ 27 + 7 = 34, 34 + 7 = 41, 41 + 7 = 48, 48 + 7 = 55, etc.
De même, on sait découper un cube en 27 cubes, donc on sait  le découper en **34, 41, 48, 55 cubes**, etc.

**• On peut découper un cube en 20 cubes ou en 38 cubes.**



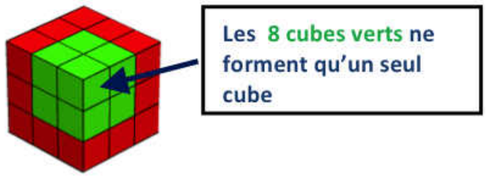
On sait découper le cube en 27 cubes.
Les 8 cubes verts dans le coin forment un seul autre cube. On remplace les 8 cubes verts par un seul cube.  27 – 8 +1 = 20, on obtient 20 cubes
On a alors **p = 20**



On sait découper le cube en 64 cubes.
Les 27 cubes verts dans le coin forment un seul autre cube. On remplace les 27 cubes verts par un seul cube. 64 – 27 +1 = 38, on obtient 38 cubes
On a alors **p = 38**

▪ 38 + 7 = 45, 45 + 7 = 52
On sait découper un cube en 38 cubes, donc on sait  le découper en **45, 52 cubes**, etc. en redécoupant à chaque fois un des petits cubes de la dernière partition en 8.

● **Si on sait découper un cube en r cubes et en s cubes, alors on sait le découper en $p = r + s - 1$ cubes.**




Par exemple, on sait découper un cube en 20 petits cubes.

Il suffit de redécouper un petit cube d'une 1ère partition en p cubes en 20 cubes pour augmenter le nombre total des cubes de 19 puisque $p - 1 + 20 = p + 19$

▪ On sait découper un cube en 8 cubes ; 8 + 19 = 27
Or on a déjà un découpage en 27 cubes

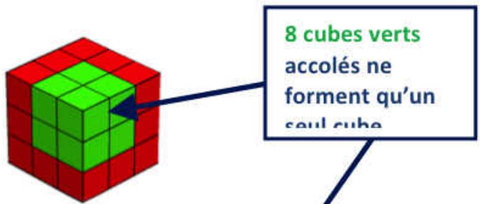
▪ On sait découper un cube en 15 cubes ; 15 + 19 = 34
Or on a déjà un découpage en 34 cubes

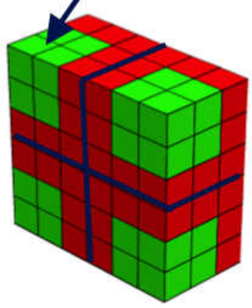
▪ On sait découper un cube en 20 cubes ; 20 +19 = 39
On sait donc découper un cube en **39 cubes**, donc aussi en **46, 53 cubes** etc. en redécoupant à chaque fois un des petits cubes en 8. En effet : 39 + 7 = 46 et 46 + 7 = 53

**En associant tous les autres découpages en r et s cubes déjà connus et en utilisant cette méthode, nous n'obtenons pas de valeurs de p plus petite que 55 déjà connues.**

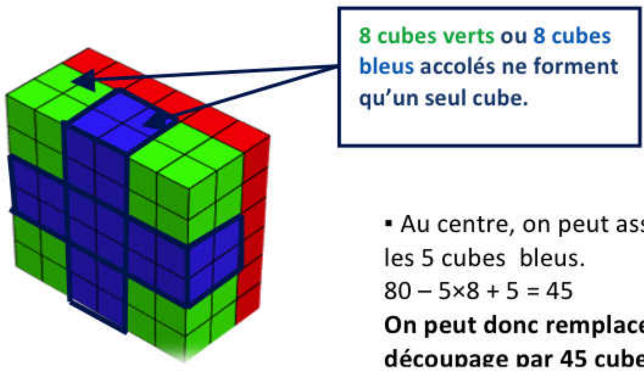
● **On peut découper un cube en 49 cubes.**

▪ On sait découper un cube en 20 cubes.



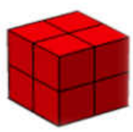



▪ On découpe 4 cubes d'une 1ère partition ayant tous les 4 une arête commune, chacun en 20 cubes comme ci-contre. On obtient 80 cubes.



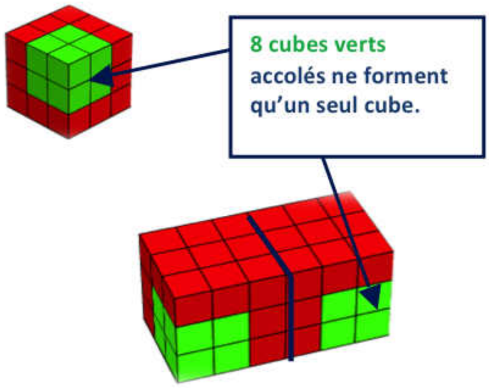

▪ Au centre, on peut assembler 5 fois 8 cubes rouges pour former 5 cubes, les 5 cubes bleus.
$80 - 5 \times 8 + 5 = 45$
**On peut donc remplacer 4 cubes ayant tous les 4 une arête commune d'un découpage par 45 cubes.**

▪ On sait découper un cube en 8 cubes, on remplace 4 cubes d'une couche par 45 cubes.
$8 - 4 + 45 = 49$ On a alors une partition en **49 cubes**.

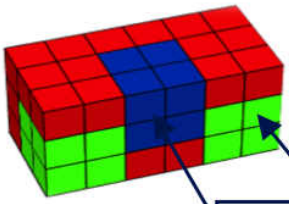


• **On peut découper un cube en 51 cubes.**

▪ On sait découper un cube en 20 cubes.

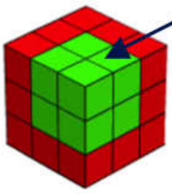



▪ On découpe 2 cubes d'une 1ère partition ayant une face commune, chacun en 20 cubes comme ci-contre. On obtient 40 cubes.




▪ Au centre, on peut assembler 8 cubes rouges pour former un cube, le cube bleu. 40 – 8 + 1 = 33

**On peut donc remplacer 2 cubes accolés par une face d'un découpage par 33 cubes.**

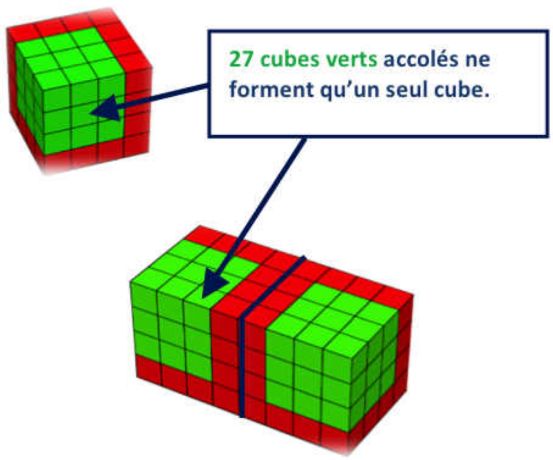


▪ On sait découper un cube en 20 cubes, on remplace 2 cubes rouges accolés par 33 cubes.

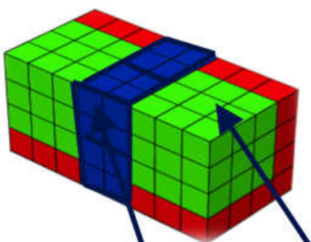
20 – 2 + 33 = 51 On a alors une partition en **51 cubes.**

• **On peut découper un cube en 54 cubes.**

▪ On sait découper un cube en 38 cubes.



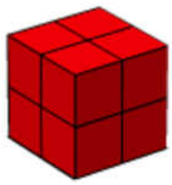

▪ On découpe 2 cubes ayant une face commune, chacun en 38 cubes comme ci-contre.
On obtient 76 cubes.




▪ Au centre, on peut assembler 4 fois 8 cubes rouges pour former 4 cubes, les 4 cubes bleus.

76 – 4×8 + 4 = 48

**On peut donc remplacer 2 cubes collés par une face d'un découpage par 48 cubes.**



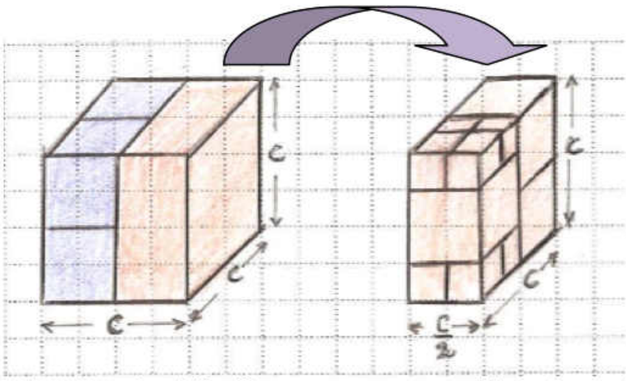
▪ On sait découper un cube en 8 cubes, on remplace 2 cubes accolés par 48 cubes.
8 – 2 + 48 = 54. On a alors une partition en **54 cubes**.

**Récapitulatif :** **Partition d'un cube en p cubes**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | / | / | / | / | / | / | 8 | / | / |
| / | / | / | / | 15 | ? | ? | ? | ? | 20 |
| ? | 22 | ? | ? | ? | ? | 27 | ? | 29 | ? |
| ? | ? | ? | 34 | ? | 36 | ? | 38 | 39 | ? |
| 41 | ? | 43 | ? | 45 | 46 | ? | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | Etc. | | | | |

On sait faire une partition du cube en p cubes pour :
- **p est le cube d'un entier**
- **p = 20 et p = 38**
- **p = 39**
- **p = 49, p = 51 et p 54**
- **si p convient alors p+7 convient**
- **p ≠ 2, p ≠ 3, p ≠ 4, p ≠ 5, p≠ 6 et p ≠ 7**

Il ne semble pas possible de découper un cube en 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 cubes.
On commence par découper dans un cube de côté c, 4 cubes de côté c/2 sur une face du cube.
Il reste alors à découper un pavé de dimensions c × c × c/2 en plus de 4 cubes. La plus petite découpe possible semble être celle en 11 cubes, on retrouve alors la partition en 4 + 11 = 15 cubes.



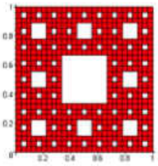
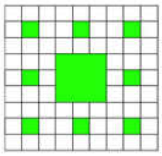
**4 cubes de côté c/2 et un pavé c/2×c×c.** **partition du pavé en 11 cubes (minimum)**

Pour les autres valeurs de p, on n'a pas réussi à trouver des partitions du cube, on ne sait pas démontrer qu'elles n'existent pas.

Comme :
- on sait faire une partition du cube en 48, 49, 50, 51, 52, 53 et 54 cubes
- 48, 49, 50, 51, 52, 53 et 54 sont 7 entiers consécutifs,
- si on sait faire une partition en p cubes, on sait aussi faire une partition en p + 7 cubes,

**on sait faire des partitions du cube pour tout p supérieur ou égal à 48.**

**On peut faire une partition d'un cube en p cubes pour tout entier p supérieur ou égal à 48.**

**Remerciements :**
À notre chercheuse Irène Marcovici qui nous a encouragés et guidés tout au long de l'année, à la Mairie de Villers-lès-Nancy, au SIS du Grand Nancy et au rectorat de l'académie de Nancy-Metz qui nous ont permis de participer au congrès de Metz.