# ARTICLE SUR LE DÉCORATEUR FARCEUR

**année 2018/2019**

*Les élèves participants :*
FERNANDES Marco, HANSEN Kim, INAL Abdelraman, MOHOUCH Ayoub, TAGNE DIESSE Anaïs, NEYBAN Armen, SAIAH-HABBAZE Hind, classes de 4° et 3°, *Collège Stendhal , Toulouse*

TILKENS-GUERIN Yuna, KROUJKOV Mila, BOUCHET Gaspard, HOAREAU Ava, BARRE Llewellyn, classes de 5° et 3° *Collège Michelet, Toulouse*

*Les professeurs :* M. Enjalran, Mme Davy, M. Duprat

*Chercheur :* M. Bouloc, de l'Institut de Mathématiques de Toulouse

**SUJET :**

Un décorateur farceur est chargé d'accrocher des tableaux dans une maison, il lui vient alors l'idée de l'accrocher avec plusieurs clous et une ficelle de sorte que si on enlève n'importe quel clou,
le tableau tombe.

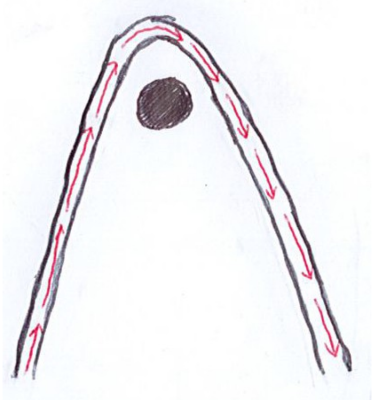
Existe t-il un nœud pour que l'on accroche le tableau avec 4 clous ?

## SOLUTION

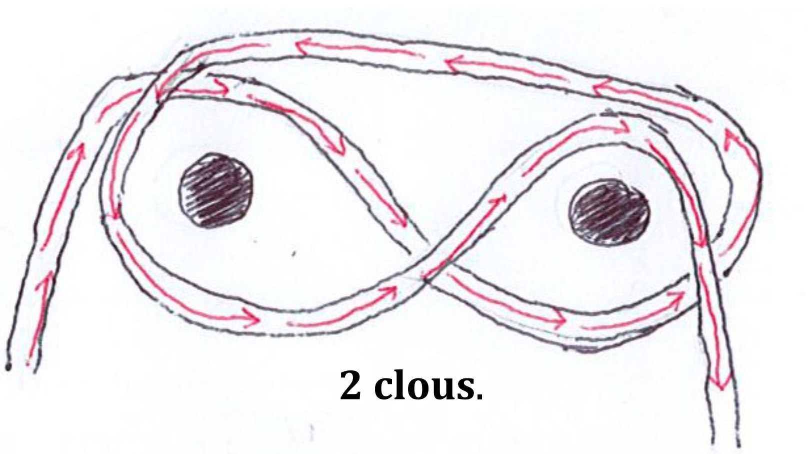
Nous allons montrer une solution possible et indiquer un procédé pour accrocher de la même manière le tableau avec d'autres nombres de clous.

Démarche :

Nous avons commencé nos recherches en nous servant des doigts pour remplacer les clous. Cette technique nous a servi à trouver la solution pour



**1 clou**

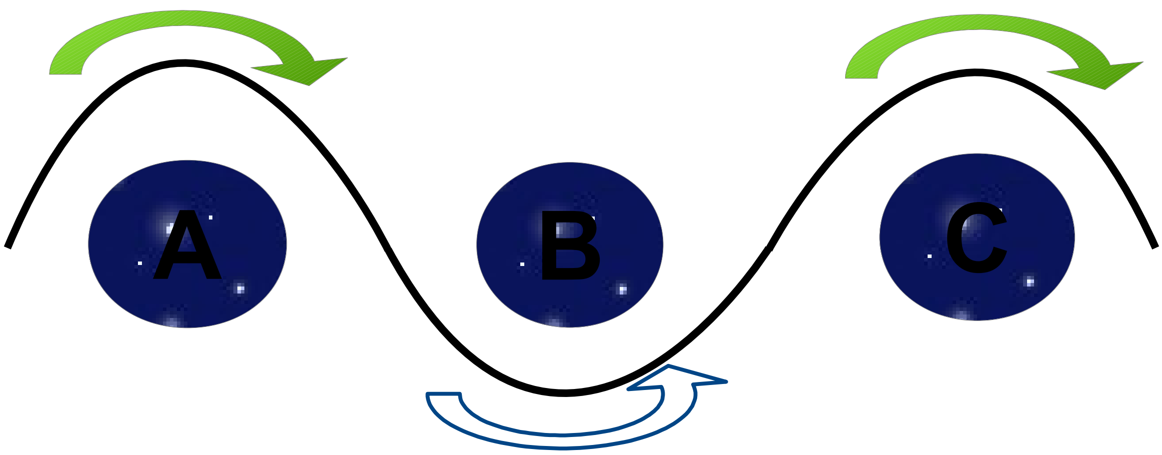


**2 clous.**

Mais très vite nous nous sommes rendu compte que les nœuds seraient trop durs et trop longs à faire sur les doigts. Nous avons donc établi une notation.

Nous avons nommé les clous par une lettre de l'alphabet (A, B, C, ...), de gauche à droite, précédé par un« + »ou un « - ».

Ces symboles correspondent au sens dans lequel la ficelle s'enroule autour du clou : Le « + » signifie que la ficelle s'enroule dans le sens des aiguilles d'une montre autour du clou. Le « - » signifie que la ficelle s'enroule dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour du clou. Nous avons aussi compris que quand la ficelle ne passait pas au-dessus du clou, on ne notait pas « + X/-X » car il ne retient pas le tableau.




(1)

Dans ce cas de figure, avec notre notation, on note ce nœud **+A +C**

Grâce à cette notation, nous avons pu mettre nos premières solutions de nœuds (pour 1, 2 et 3 clous) sur papier :

**Pour 1 clou :** **+A**

**Pour 2 clous :** **+B +A -B -A** (2)

**Pour 3 clous :** **+C +A -B -A +B -C -B +A +B -A** (3)

En regardant bien ces nouvelles formules, nous avons pu remarquer plusieurs choses :
- Si nous considérons les lettres comme des variables, elles sont égales à 0.
- Une certaine logique est repérable :

Nous avons remarqué que pour passer de la formule de 2 clous à celle de 3 clous :

- on introduit la notation du clou C avec le signe + ;
- puis on insère la formule pour deux clous,
- l'opposé du clou C.
- Enfin, on doit mettre la formule pour 2 clous à l'envers et en inversant les signes.

**+C +A -B -A +B** **-C -B +A +B -A**

Formule pour 2 clous à l'endroit

Formule pour 2 clous à l'envers en inversant les signes

Nous avons aussi remarqué que cette technique marchait pour passer de la formule de 1 clou à la formule de 2 clous. C'est ainsi que nous avons obtenu la formule pour le nœud avec 4 clous.

**+D +C +A –B –A +B –C –B +A +B –A –D +A –B –A +B +C –B +A +B –A –C**

Pour vérifier un nœud formellement, il faut écrire sa formule. Si on veut simuler la situation du retrait du clou A (par exemple), on barre toutes les lettres (et signes associés) qui le concernent. Si deux clous de signes opposés sont côte à côte alors on les barre aussi (car un tour dans un sens puis dans l'autre autour du même clou ne retient pas le tableau), cette opération est répétable jusqu'à ce qu'il ne reste plus de lettre alors cela veut dire que la formule est juste si l'on retire le clou A. Pour être sûr que la formule marche avec n'importe quel retrait de clou, il faut tester tous les clous.

**Formule pour 3 clous :** **+C +A -B -A +B -C -B +A +B -A**

- **<u>On supprime le clou A :</u>**

+C +A -B -A +B -C -B +A +B -A et on obtient alors : +C -B +B -C -B +B

**On supprime toutes les lettres de signes opposés qui sont à côté :**

+C -B +B -C -B +B et on obtient alors +C -C. Ce qui donne alors 0.

- **On supprime le clou B :**

+C +A -B -A +B -C -B +A +B -A et on obtient alors : +C +A -A -C +A -A

**On supprime toutes les lettres de signes opposés qui sont à côté :**

+C +A -A -C +A -A et on obtient alors +C -C. Ce qui donne alors 0.

- **On supprime le clou C :**

+C +A -B -A +B -C -B +A +B -A et on obtient alors :+A -B -A +B -B +A +B -A

**On supprime toutes les lettres de signes opposés qui sont à côté :**

+A -B -A +B -B +A +B -A puis +A -B -A +A +B -A.

Ensuite +A -B +B -A et enfin +A -A. Ce qui donne une nouvelle fois 0.

**Conclusion :**

Notre idée de technique de résolution pour le problème des 4 clous marche pour tout problème que l'on veut résoudre. Ainsi, on peut trouver la formule résolvant le problème de n'importe quel nombre de clous, à condition d'avoir résolu les nombres de clous précédents. (4)

**Notes d'édition**

(1) Une autre manière d'établir la formule est de ne regarder les passages de la ficelle qu'au-dessus des clous : si le passage se fait vers la droite, on met le signe + et si le passage se fait vers la gauche, on met le signe -.

(2) On peut remarquer que cette formule, bien qu'elle fonctionne, ne correspond pas au nœud pour deux clous de la première figure. Cette figure correspond à la formule **(+A-B-A+B).** On peut en déduire que la solution n'est pas unique. On notera aussi que ces deux formules ne sont pas inverses l'une de l'autre. La diversité de solutions n'est donc pas due au fait qu'on peut faire un nœud dans les deux sens. On peut aussi en déduire, par inversion, deux autres formules de nœuds pour deux clous.

(3) Il est à noter qu'ici c'est la formule pour deux clous, illustrée par la première figure, qui est utilisée **(+A-B-A+B)**, et non pas l'autre formule donnée ci-dessus pour deux clous **(+B+A-B-A)**. Pourquoi avoir choisi la formule **(+B+A-B-A)** pour deux clous ? En fait, cette formule peut se déduire de la formule à un clou **(+A)** par la récurrence décrite ici. En effet, pour établir cette formule, on peut procéder ainsi qu'indiqué : on introduit la notation du nouveau clou B avec le signe + ; on insère la formule à un clou **(+A)** ; l'opposé du clou B **(-B)** ; enfin l'opposé de la formule à un clou **(-A)**. Ceci donne bien la formule indiquée **(+B+A-B-A)**. Comment rendre cohérente cette apparente difficulté ? D'une part, en insistant sur le fait que la formule n'est pas unique. La formule de récurrence proposée n'est donc pas forcément unique non plus. Un exercice intéressant est d'établir, s'inspirant de la méthode proposée ici, une nouvelle procédure qui permet de passer de la formule à un clou **(+A)** à celle à deux clous pour la première figure **(+A-B-A+B)**.

(4) La condition finale est remplie car une solution a été donnée pour 1 clou, donc pour 2, donc pour 3, donc… pour n'importe quel nombre de clous.