# Jeu de Cubes

**Élèves :** en seconde : Juliette Martinal, Aïda Tauzin, Hugo Batt, Louis Fougere, Agathe Rolland.
en BTS comptabilité : Jean-Louis Nicolas, Pierre-Alexandre Lafitte.

**Enseignants :** Rachida Belouazza, Alain Lavignolle.

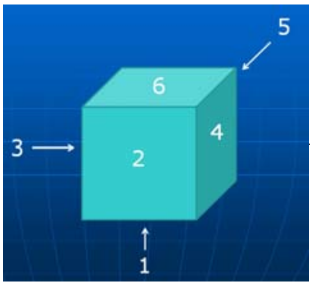
**Atelier Maths en Jeans 2012-2013 du Lycée Pierre d'Aragon de Muret.**

**Chercheuse :** Véronique Lizan (Université de Toulouse 2)

## Présentation :

Nous disposons de 4 cubes à 6 faces. Sur chacune des faces de ces cubes, on trouve une gommette de couleur rouge, jaune, bleue ou verte.
Le but est d'empiler les 4 cubes les uns sur les autres, de sorte que les 4 couleurs soient visibles sur les 4 faces de l'empilement.

## Positionnement des cubes :




Pour se repérer lorsque nous travaillions avec les cubes, nous avons numéroté leurs faces.

Comme sur un dé classique, la somme des faces opposées donne 7. Ainsi la face du dessous est appelée « 1 » et celle du dessus « 6 ». Ensuite, nous avons effectué une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. La face avant est ainsi la 2 (et la face arrière la 5), la face de gauche est la numéro 3 et celle de droite la 4.

Comme chaque cube a 6 faces, pour positionner un cube nous avons 6 façons de choisir la face qui sera dessous (la « 1 »).
Une fois qu'un cube est posé, on décide de ne pas le faire bouger, et de faire tourner celui qui est dessus. Avec les 2 premiers cubes, on a 4 façons d'associer les faces visibles de face (qui correspondent au numéro 2) en faisant tourner le cube du dessus. C'est tour à tour la face numéro 2, puis 3, puis 5, puis 4 qui sont placées devant. (Ici, on a fait tourner le cube du dessus dans le sens antihoraire).
Récapitulons : Nous avons 6 façons de poser le premier cube, puis 6*4 façons de poser le deuxième.
Comme nous avons 4 cubes, cela nous donne $6^4*4^3=82944$ combinaisons possibles ! (1)

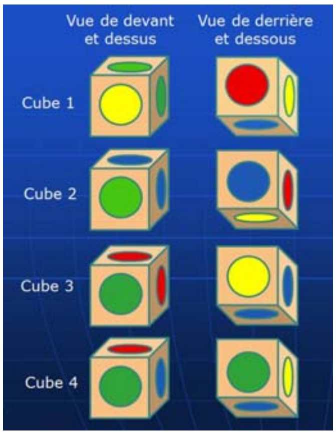
Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de faire tourner les cubes sur leurs axes, en gardant la face 1 en bas et la face 6 en haut. Mais nous pouvons aussi retourner nos cubes ! (2)

Comme nous avons précédemment numéroté nos faces, nous pouvons « déplier » nos cubes pour réaliser des patrons. Si on pose le cube sur la face 1, (et donc avec le 6 vers le haut) on obtient :

Et si on retourne le cube (donc si on le pose sur la face 6, avec le 1 en bas), on obtient :

Les faces visibles (2, 3, 5, 4) sont alors disposées dans l'autre sens, symétriquement.
Si on ne prend pas en compte ces permutations, nous avons toujours 6 façons de poser le 1er cube, puis pour chaque cube 3 façons d'en poser un sur le précédent, soit $6*3^3 = 162$ possibilités !
Nous venons d'étudier les différentes positions des cube les uns par rapport aux autres, mais il faut aussi prendre en compte les gommettes de couleur, car on doit voir les 4 couleurs sur les 4 faces visibles de l'empilement !

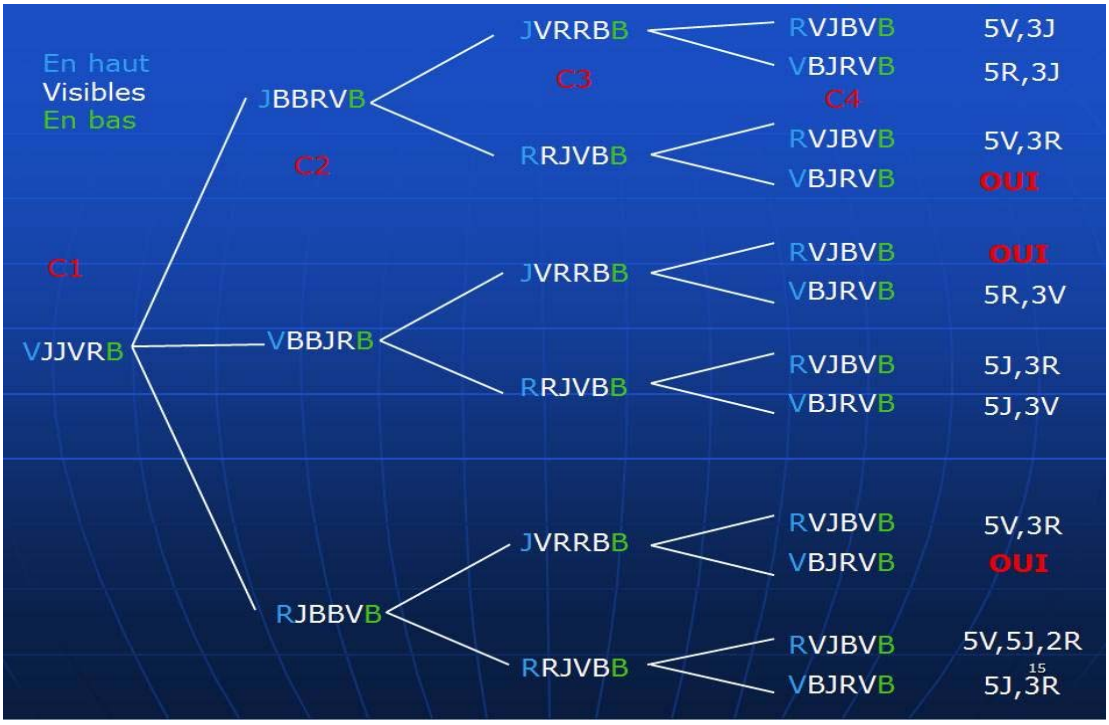
## Étude des couleurs :




1ere Méthode :

Tout d'abord, nous avons compté le nombre de gommettes de chaque couleur. Il y a donc en tout sur les 6 faces des 4 cubes 24 gommettes qui sont réparties ainsi : 8 bleues, 6 vertes, 5 rouges et 5 jaunes (remarquons que cela fait bien 24 !). Comme on veut les 4 couleurs sur les 4 faces de l'empilement, il faut donc que 4 bleues, 4 vertes, 4 rouges et 4 jaunes soient visibles. Ce qui signifie qu'il faut cacher 4 faces bleues, 2 faces vertes, 1 face rouge et 1 face jaune.
Comme il faut cacher 4 faces bleues et qu'il n'y a jamais 2 faces bleues opposées sur un cube, (3)
et que de plus on dispose de 4 cubes, il faut cacher 1 face bleue par cube.
Or, on constate qu'il n'y a qu'une face bleue sur le 1er cube. Nous savons donc déjà comment le positionner ! (4)
Puis il y a 3 faces bleues sur le 2eme cube, donc 3 possibilités différentes, et enfin deux possibilités pour chacun des cubes 3 et 4, qui ont tout deux 2 faces bleues chacun.

Pour déterminer toute les possibilités, nous avons construit un arbre, dans lequel nous avons fait la distinction entre faces visibles et faces cachées.
Dans chaque « chemin » de cet arbre, dans les faces visibles, chaque couleur doit apparaître 4 fois et 4 seulement.

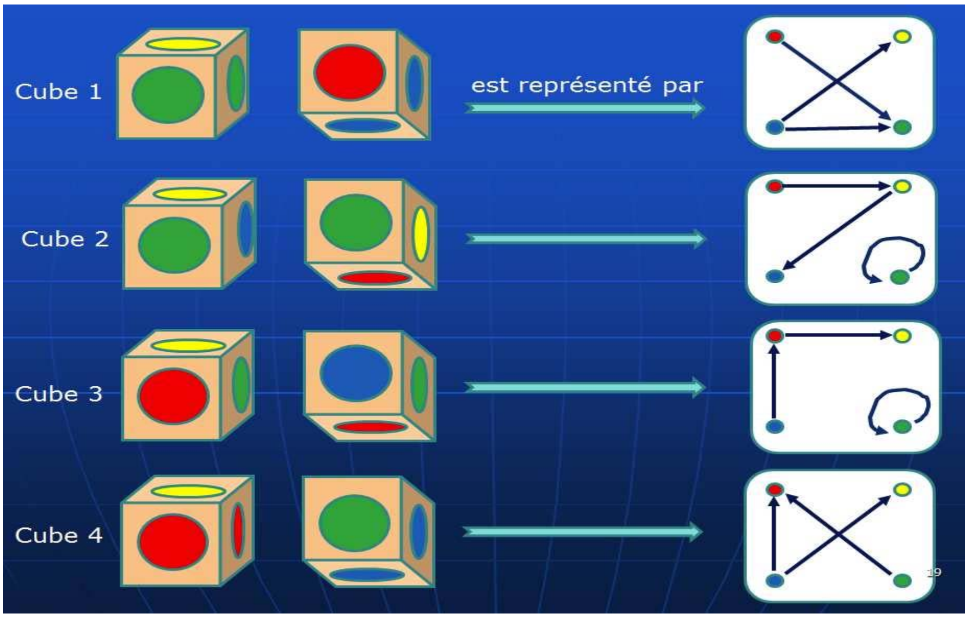



Il ne reste plus que 3 empilements susceptibles d être solution du problème.
Nous n'avons pas trouvé de meilleure méthode que de « faire tourner » les cubes les uns sur les

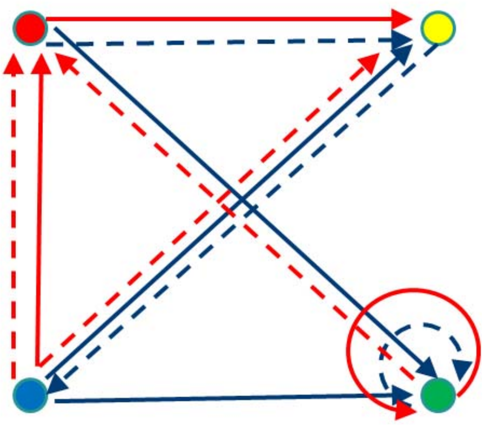
autres pour tester manuellement toutes les possibilités. Finalement, nous avons trouvé une solution, et emporté par l'enthousiasme nous avons cru que c'était la seule !

2eme Méthode :

La méthode précédente nous a permis de trouver une solution, mais elle nous à pris beaucoup de temps et elle est un peu hasardeuse. Nous avons donc cherché une autre manière de résoudre le problème. Dans cette deuxième méthode, nous allons nous servir des graphes.




Avec l'orientation des cubes que nous avons vu dans la partie « positionnement des cubes », chaque cube a 3 couples de faces : haut-bas, droite-gauche et devant-derrière.
Chaque cube est représenté par un graphe où les couleurs sont reliées deux à deux par trois flèches. Une flèche représente donc la liaison entre deux faces opposées. Si jamais deux faces opposées ont la même couleur, on représente cette liaison par une boucle.



Comme nous avons 4 cubes, nous disposons de 4 graphes, qui représentes chacun l'arrangement des couleurs opposées sur chaque cubes. Pour étudier l'empilement, nous avons superposés les 4 graphes.

Nous cherchons maintenant quels sont les empilements qui permettent d'avoir les 4 couleurs sur 2 faces opposées de l'empilement. (Il nous faudra ensuite avoir 2 de ces empilements en même temps, pour avoir les 4 couleurs sur non pas 2, mais 4 faces de l'empilement). (5)

5 graphes-solutions représentent les empilements qui permettent d'avoir les 4 couleurs sur 2 faces opposées de l'empilement. (6)

Dans notre graphe qui représente la superposition des 4 graphes qui représentent les 4 cubes, il nous faut donc extraire deux de ces graphes-solutions. (7)

Cette méthode est beaucoup plus rapide que la précédente et de plus elle nous a permis de trouver la deuxième solution du problème ! (8)

## Conclusion

Avec la méthode des graphes, nous pouvons désormais fabriquer des jeux nous mêmes : On choisit deux graphes solutions qu'on superpose, puis on ajoute des flèches pour avoir 12 liaisons (qui représentes les 24 faces opposées deux à deux), et on répartit ces 12 flèches sur les 4 cubes. Lorsqu'on dispose de 4 graphes, qui modélisent chacun un cube, on peut construire ces cubes.

On pourrait alors envisager des jeux où il y aurait 2, 3, 5, 6 ou plus de cubes dans l'empilement, et pas nécessairement 4 !

Notes de l'édition

(1) Pour chaque cube ajouté, nous aurons à nouveau 6*4 possibilités de placement.

(2) Les éditeurs ne comprennent pas l'utilité du paragraphe suivant, ni le calcul : le précédent calcul comptait bien toutes les combinaisons possibles.

(3) Donc il n'est pas possible de cacher plus d'une face bleue d'un même cube.

(4) Notons que l'arbre qui suit n'explore pas toutes les possibilités, car les retournements de cube (expliqués plus haut) ne sont pas pris en compte (par exemple le cube 1 peut se positionner avec la face bleue vers le bas, ou vers le haut). Cet arbre permet d'éliminer des combinaisons pour lesquels toutes les couleurs n'apparaissent pas 4 fois sur les faces.

(5) En effet, lorsque les 2 faces opposées d'un premier empilement sont choisies pour être visibles sur deux faces, il est toujours possible de faire tourner le cube pour obtenir la combinaison souhaitée du deuxième empilement sur les deux faces visibles restantes.

(6) Il est aussi possible de changer les couleurs de position sur chacun de ces graphes, nous aurons toujours les 4 couleurs sur 2 faces opposées de l'empilement !

(7) Bien entendu, n'ayant aucune arrête (aucun trait) en commun.

(8) Et maintenant, arrivez-vous à donner le nombre exact de solutions ?