Les Croustillons

Juin 2015

Nom, prénom et niveaux des élèves : Pauline Bessemans, Camille Charlier, France Gheeraert, Quentin Lowette, Marc Philippart de Foy - 5ème et 6ème secondaire (équivalent à 1ère et terminale en France)

Établissement : Centre Scolaire Saint-Benoît Saint-Servais à Liège, Belgique

Enseignant : Romain Schietaert

Chercheurs : Julien Jeunechamps, Céline Esser, Université de Liège

Table des matières

1 Position du problème

Sur la Foire de Liège, il n'est possible d'acheter que des paquets de 9 et 14 croustillons. Dans ces conditions, il est possible d'acheter 55 croustillons mais pas 48.

Que se passe-t-il si le nombre de croustillons par paquet varie ?

Combien de croustillons pourrons-nous alors acheter ? Intuitivement, il semble que plus la commande de croustillons est élevée, plus elle a de chance d'être satisfaite. Y aurait-il un seuil au-delà duquel toutes les commandes sont possibles ?

De combien de manières pourrons-nous satisfaire la commande si elle est possible ?

2 Notations

Nous définirons par a et $b \in \mathbb{N}$ le nombre de croustillons dans chaque paquet et nous supposerons, sans perte de généralité, que

$$a \geq b.$$

Dès lors, les nombres de croustillons que nous pourrons acheter s'écrivent sous la forme

$$k \cdot a + l \cdot b \qquad k, l \in \mathbb{N}.$$

3 Premières recherches

En faisant quelques essais avec des nombres précis et grâce à notre intuition, nous avons découvert que, dans certains cas, il était possible d'acheter autant de croustillons que l'on veut au-delà d'un certain nombre que nous avons appelé *seuil*. Nous avons ensuite cherché à démontrer l'existence d'un seuil puis à trouver sa valeur optimale. [1]

4 Cas triviaux

Nous pouvons remarquer facilement que si $a = b$ ou si a ou b vaut 0, on ne pourra obtenir que des multiples de b ou de a respectivement.
Par contre, si a ou b vaut 1, toutes les demandes peuvent être satisfaites.

5 Existence du seuil

$$\boxed{\text{Il existe un seuil si et seulement si } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux.}}$$

$\Rightarrow$
Hyp : Il existe un seuil
Th : a et b sont premiers entre eux

Démonstration. Par l'absurde :
Supposons que a et b ne sont pas premiers entre eux. Ainsi, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le $PGCD$ de a et de b, on a $p > 1$. Par définition du $PGCD$, il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\begin{cases} a = m \cdot p \\ b = n \cdot p. \end{cases}$$

Donc, les nombres que nous cherchons à atteindre s'écrivent

$$k \cdot (m \cdot p) + l \cdot (n \cdot p),$$

ou encore

$$p \cdot (k \cdot m + l \cdot n).$$

On ne pourra donc acheter que des nombres de croustillons qui sont multiples de p. Par conséquent, il n'y a pas de seuil, ce qui contredit l'hypothèse.

$\square$

$\Leftarrow$
Hyp : a et b sont premiers entre eux
Th : Il existe un seuil

Démonstration. Si a et b sont premiers entre eux, c'est-à-dire si le $PGCD$ de a et b vaut 1, grâce au théorème de Bézout [1] , on sait qu'il existe des entiers q et r (forcément de signes opposés), tels que $q \cdot a + r \cdot b = 1$.

S'il existe $s, t \in \mathbb{N}$ pour lesquels on peut acheter

$$(s \cdot a + t \cdot b) + n \cdot (q \cdot a + r \cdot b)$$

croustillons pour tout n entre 0 et $b-1$ (rappelons que b est inférieur à a), alors on a un seuil, en l'occurence, $s \cdot a + t \cdot b$. De fait, on a alors b nombres de croustillons consécutifs possibles auxquels on peut ajouter b pour avoir les b suivants et ainsi de suite.

1. Soient a, $b \in \mathbb{N}^*$, et $c \in \mathbb{Z}$. Il existe des entiers x, $y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ax + by = c$$

si, et seulement si, c est un multiple du $PGCD$ de a et b.

Pour qu'on ait cette condition, il faut, et il suffit, que, dans l'écriture réduite de la formule ci-dessus, les coefficients de a et de b soient positifs, quel que soit n entre 0 et $b-1$. Il faut donc que $s+n\cdot q \geq 0$ et $t+n\cdot r \geq 0$, et donc que

$$\begin{cases} s \geq -n\cdot q \\ t \geq -n\cdot r \end{cases}$$

quelle que soit la valeur de n entre 0 et $b-1$. Pour $n=0$, on obtient que s et t doivent être positifs. Si q (resp. r) est positif, la première (resp. deuxième) inégalité est toujours vérifiée. Si q (resp. r) est négatif, on doit avoir

$$s \geq n\cdot |q|$$

$$(\text{resp. } t \geq n\cdot |r|)$$

pour tout n entre 0 et $b-1$. Comme n multiplie un nombre positif, le membre de droite est maximisé quand n l'est, c'est-à-dire quand $n=b-1$. Il existe bel et bien des valeurs de s (resp. t) telles que

$$s \geq (b-1)\cdot |q|$$

$$(\text{resp. } t \geq (b-1)\cdot |r|).$$

Remarquons que les nombres s et t ne sont pas uniques, ce qui est logique vu que tout nombre supérieur à un seuil est aussi seuil. □

6 Valeur du meilleur seuil

Maintenant que nous avons montré qu'il existe un seuil si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux, nous nous limiterons uniquement à ce cas.

$$\boxed{\text{Le seuil optimal vaut } (a-1)(b-1).}$$

Pour la suite, nous utiliserons une droite graduée sur les naturels pour représenter les nombres possibles de croustillons par commande.

Commençons par mettre les nombres qui s'écrivent sous la forme $k\cdot a$ (ceux pour lesquels $l=0$). Ce sont les multiples de a. Ils délimitent des intervalles ouverts [2] que nous appelons $I_0, I_1, I_2, \ldots$ où

$$I_i =]ia; (i+1)a[\,.$$

Il y a donc $a-1$ entiers dans chacun de ces intervalles. Dans un premier temps, nous regarderons ce qui se passe avant ab, c'est-à-dire que nous nous arrêterons à I_{b-1}.

Plaçons maintenant sur la droite graduée les multiples des b, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $l\cdot b$. Comme $b<a$, on aura au moins un multiple de b dans chaque intervalle. Nommons $q_0, q_1, \ldots, q_{b-1}$ le nombre de multiples de b dans les intervalles $I_0, I_1, \ldots, I_{b-1}$.

2. Lorsque nous parlerons d'intervalles, nous ne considérerons que les nombres entiers appartenant à ces intervalles.

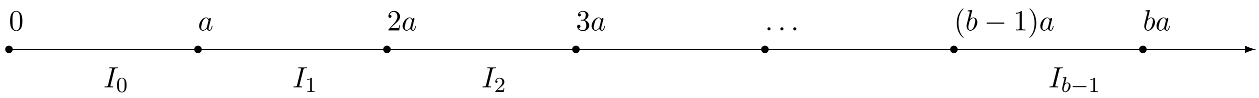

FIGURE 1 – Représentation de la droite graduée et des intervalles $I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{b-1}$.

La valeur de $\sum_{i=0}^{b-1} q_i$ correspond au nombre de multiples de b dans les intervalles mis bout à bout, c'est-à-dire dans $]0; ab[$ sans les multiples de a. Or, a et b sont premiers entre eux, ce qui veut dire que leur plus petit commun multiple (différent de 0) vaut ab. On en déduit donc que tous les multiples de a strictement inférieurs à ab et différents de 0 ne peuvent pas être des multiples de b. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{b-1} q_i$ correspond au nombre de multiples de b dans $]0; ab[$ et vaut donc $a - 1$.

On n'a, jusqu'a présent, pris en compte que les nombres où $k = 0$. Si maintenant $k = 1$, tous les nombres trouvés précédemment vont être décalés de a et donc d'un intervalle ce qui veut dire qu'on aura 0 nombre de la forme $a + l \cdot b$ dans I_0, q_0 dans I_1, q_1 dans I_2, ... q_{b-2} dans I_{b-1}.
De même, lorsque $k = 2$, on décale tout d'un intervalle et ainsi de suite jusqu'à $k = b - 1$.

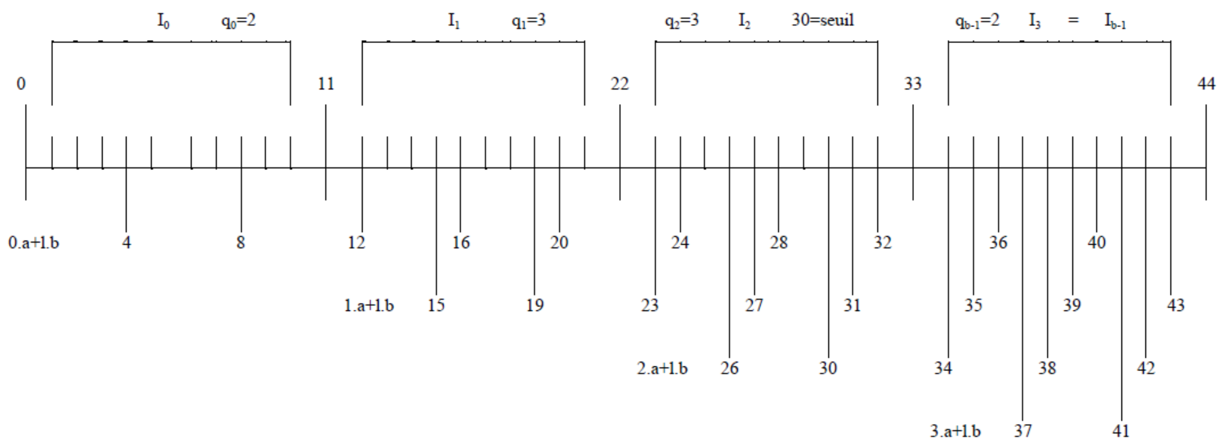

FIGURE 2 – Représentation de la construction pour $a = 11$ et $b = 4$.

Se pose alors la question de savoir si on ajoute à chaque fois des nombres différents des précédents, si on complète à chaque fois des "espaces vides" ? Autrement dit, existe-t-il des nombres strictement inférieurs à ab pouvant s'obtenir de deux façons différentes ?

$\boxed{\text{Les nombres inférieurs à } ab \text{ ne peuvent s'obtenir que d'une seule façon au plus.}}$

Par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier m strictement inférieur à ab s'écrivant de deux façons différentes, c'est-à-dire pour lequel il existe $k, k', l, l' \in \mathbb{N}$ tels que

$$m = k \cdot a + l \cdot b = k' \cdot a + l' \cdot b \tag{1}$$

avec $k \neq k'$ et $l \neq l'$. Ce nombre étant strictement inférieur à ab, on a

$$k < b, \quad k' < b, \quad l < a, \quad l' < a \tag{2}$$

Si on réécrit (1), on obtient

$$(k - k') \cdot a = (l' - l) \cdot b.$$

Comme a et b sont premiers entre eux, a doit diviser $l' - l$. Or, cette différence est strictement inférieure à a (par (2)) donc la seule possibilité est qu'elle soit égale à 0, c'est-à-dire que $l = l'$. Ceci est absurde vu les hypothèses.

□

Au vu de ce résultat, on ne comblera bien que des emplacements vides. On atteint donc q_0 nombres distincts dans I_0, $q_0 + q_1$ nombres distincts dans I_1, $q_0 + q_1 + q_2$ dans I_2 et ainsi de suite. Dans I_{b-1} on atteint donc $\sum_{i=0}^{b-1} q_i$ nombres distincts. Or on a vu que cette somme valait $a - 1$. Les $a - 1$ emplacements de cet intervalle sont donc bien atteints.
Ainsi, les nombres entre $a \cdot (b - 1)$ et ab (inclus) sont possibles. On a alors a nombres consécutifs qui sont atteints. Si à chacun de ces nombres on ajoute a, on peut atteindre les a nombres suivants et ainsi de suite. On en tire donc que $a \cdot (b - 1)$ est un seuil provisoire. Néanmoins, montrons que ce seuil n'est pas le meilleur.

Utiliser l'exemple où $a = 11$ et $b = 4$ peut simplifier la compréhension de la suite de la démonstration avec$I_{b-1} = I_3 =]33, 44[$.

Dans $I_{b-1} =](b - 1) \cdot a; ab[$, le plus petit nombre qui s'écrira sous la forme $(b - 1) \cdot a + l \cdot b$ vaut $(b - 1) \cdot a + b$ car tous les nombres entre $(b - 1) \cdot a$ et lui ont pu s'écrire sous la forme $k \cdot a + l \cdot b$ où $k < b - 1$ et $l \geq 1$. De ce fait, on peut retirer b à tous ces nombres sans que les coefficients de a ou de b ne deviennent négatifs. [2]

On a donc de nouveaux nombres dont on est sûr qu'ils sont atteints et qui sont dans l'intervalle

$$]((b - 1) \cdot a + 1) - b; ((b - 1) \cdot a + b) - b[$$

c'est-à-dire l'intervalle

$$[(a - 1)(b - 1); a \cdot (b - 1)[\ .$$

Ceci nous donne un nouveau seuil provisoire qui est $(a - 1)(b - 1)$.

Ainsi, dans l'exemple, le semi-fermé $[34, 37[$ ne contient que des nombres de la forme $ka + lb$ avec $l > 0$, et induira le semi-fermé $[34 - 4, 37 - 4[= [30, 33[$.

$\boxed{(a-1)(b-1) \text{ est le meilleur seuil.}}$

Par l'absurde. Supposons qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} m \cdot a + n \cdot b &= (a-1)(b-1) - 1 \\ &= ab - b - a, \end{aligned} \tag{3}$$

soit

$$ab = a \cdot (m+1) + b \cdot (n+1),$$

ou encore

$$a(b - m - 1) = b \cdot (n+1).$$

Donc $b \cdot (n+1)$ est un multiple de a. Or a et b sont premiers entre eux ; donc $n + 1$ doit être un multiple de a. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n + 1 = k \cdot a.$$

De plus, comme $n \in \mathbb{N}$, $n + 1$ est strictement positif, donc k aussi. Remplaçons maintenant la nouvelle valeur de n dans l'égalité de départ (3). Il vient alors

$$ab - b - a = m \cdot a + (k \cdot a - 1) \cdot b,$$

d'où

$$ab - a = m \cdot a + k \cdot ab$$

En divisant par a, on obtient

$$b = m + k \cdot b + 1.$$

Rappelons que $k \in \mathbb{N}^*$ et donc que $k \cdot b \geq b$. On voit facilement que le membre de droite est strictement supérieur à b puisque m est positif. L'égalité est donc absurde. □

7 Propriétés du meilleur seuil

$\boxed{\text{Le seuil } (a-1)(b-1) \text{ est toujours dans l'intervalle }](b-2)a, (b-1)a[}$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & (a-1)(b-1) \in I_{b-2} \;=\;](b-2)a, (b-1)a[\\ \Leftrightarrow\; & (b-2)a < (a-1)(b-1) < (b-1)a \\ \Leftrightarrow\; & ab - 2a < ab - a - b + 1 < ab - a \\ \Leftrightarrow\; & 2a > a + b - 1 > a \end{aligned}$$

ce qui est exact car $a > b - 1 > 0$.

□

$\boxed{\text{Le seuil } (a-1)(b-1) \text{ est un nombre pair.}}$

Par l'absurde.
Si $(a-1)(b-1)$ est impair, $a-1$ et $b-1$ sont impairs, donc a et b sont pairs, ce qui contredit le fait que a et b soit premiers entre eux.

$\square$

$\boxed{\text{Le nombre de commandes irréalisables dans }]0, ab] \text{ vaut } \frac{(a-1)(b-1)}{2}.}$

Démonstration.
Placer les q_0 multiples de b dans I_0 en partant de 0 vers ab ou placer les q_{b-1} multiples de b dans I_{b-1} de ab vers 0 sont deux procédés identiques (b correspond à $ab-b$, $2b$ à $ab-2b$,...).

Il y a donc le même nombre de multiples de b dans I_0 que dans I_{b-1}.
Ainsi, $q_0 = q_{b-1}$.

Placer les $q_0 + q_1$ multiples de b dans $I_0 \cup I_1$ en partant de 0 vers ab ou placer les $q_{b-1} + q_{b-2}$ multiples de b dans $I_{b-1} \cup I_{b-2}$ de ab vers 0 sont deux procédés identiques.

Il y a donc le même nombre de multiples de b dans $I_0 \cup I_1$ que dans $I_{b-1} \cup I_{b-2}$.
Ainsi, $q_0 + q_1 = q_{b-1} + q_{b-2}$, ce qui entraine $q_1 = q_{b-2}$.

Et ainsi de suite : on obtient que $q_k = q_{b-(k+1)}$ en considérant $I_0 \cup I_1 \cup ... \cup I_k$ et $I_{b-1} \cup I_{b-2} \cup ... \cup I_{b-(k+1)}$.

Rappelons que le nombre d'emplacements remplis dans I_k vaut $q_0 + q_1 + ... + q_k$. De plus, on sait que

$$q_0 + ... + q_{b-1} = a - 1,$$

ce qui correspond au nombre de multiples de b dans $]0, ab[$, et chaque intervalle I_i contient $a-1$ entiers.

L'intervalle I_{b-1} est entièrement rempli vu que le seuil est dans I_{b-2}.

Dans $I_0 \cup I_{b-2}$, le nombre d'emplacements libres est de

$$\begin{aligned}
& \big((a-1) - q_0\big) + \big((a-1) - (q_0 + q_1 + ... + q_{b-2})\big) \\
= \quad & \big((a-1) - q_0\big) + \big((a-1) - (\sum_{k=0}^{b-1} q_k - q_{b-1})\big) \\
= \quad & \big((a-1) - q_0\big) + \big((a-1) - (a-1) + q_{b-1}\big) \\
= \quad & \big((a-1) - q_0\big) + \big((a-1) - (a-1) + q_0\big) \\
= \quad & a - 1.
\end{aligned}$$

Dans $I_1 \cup I_{b-3}$, le nombre d'emplacements libres est de

$$\begin{aligned}
& \big((a-1)-(q_0+q_1)\big)+\big((a-1)-(q_0+q_1+...+q_{b-3})\big) \\
= & \big((a-1)-(q_0+q_1)\big)+\big((a-1)-(\sum_{k=0}^{b-1} q_k-(q_{b-1}+q_{b-2}))\big) \\
= & \big((a-1)-(q_0+q_1)\big)+\big((a-1)-(a-1)+(q_{b-1}+q_{b-2})\big) \\
= & \big((a-1)-(q_0+q_1)\big)+\big((a-1)-(a-1)+(q_0+q_1)\big) \\
= & a-1.
\end{aligned}$$

Et ainsi de suite avec $I_2 \cup I_{b-4}$ ou $I_k \cup I_{b-(k+2)}$ qui à chaque fois donnent $(a-1)$ emplacements libres.

Dans $]0; ab[$, on a b intervalles I_i :

Si b est impair, comme on ne considère pas dans le raisonnement ci-dessus I_{b-1} déjà rempli, et puisque $(b-1)$ est pair, il y a $\frac{b-1}{2}$ groupements d'intervalles I_k et $I_{b-(k+2)}$ ce qui donne $(a-1)\cdot\frac{b-1}{2}$ emplacements non-pris.

Si b est pair, il y a $b-2$ intervalles à grouper 2 par 2 qui laissent $(a-1)\cdot\frac{b-2}{2}$ emplacements libres.
Dans l'intervalle médian, $I_{\frac{b-2}{2}} =]\frac{b-2}{2}\cdot a; \frac{b}{2}\cdot a[$, il y a $\frac{a-1}{2}$ emplacements libres puisque

$$q_0+q_1+...+q_{\frac{b-2}{2}} = q_{\frac{b-2}{2}+1}+q_{\frac{b-2}{2}+2}+...+q_{b-1} = \frac{a-1}{2}$$

Donc, si b est pair, on a au total

$$(a-1)\cdot\frac{b-2}{2}+\frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

emplacements libres.

□

8 Nombre de façons de satisfaire une demande de croustillons

Nous avons remarqué qu'il y avait, à partir de ab, parfois plusieurs manières de satisfaire une commande de croustillons.
Par manque de temps, nous n'avons malheureusement pas eu le temps de démontrer toutes nos dernières trouvailles. Néanmoins, nous présentons ici quelques pistes de réflexion.

Définissons tout d'abord 2 ensembles pour tout naturel n qui est dans $[0, ab[$:

$$P = \{p \in \mathbb{N}, 0 \leq p < ab : \exists k, l \in \mathbb{N} : p = ka + lb\}$$

$$F = \{f \in \mathbb{N}, 0 \leq f < ab : f \notin P\},$$

qui forment une partition de $[0; ab[$.

On a démontré que $\#\mathrm{F} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$, d'où $\#\mathrm{P} = ab - \frac{(a-1)(b-1)}{2}$. De plus, on sait qu'une commande qui est satisfaite avant ab (donc qui appartient à P) ne peut l'être que d'une seule manière.

On sait que la demande de ab croustillons peut être satisfaite de 2 manières différentes : b paquets de a croustillons et a paquets de b croustillons.

Si maintenant on change d'intervalle et si on considère un nombre n de croustillons tel que $ab \leq n < 2ab$ et $n = ab + c$ avec $c \in [0, ab[$, deux cas se présentent à nous : le cas où $c \in P$ et le cas où $c \in F$. [3]

Si $\underline{c \in P}$: $c = ka + lb \Rightarrow n = ab + (ka + lb)$.
Cette commande peut être satisfaite au moins de deux manières différentes (exactement deux manières ?) : k paquets de a croustillons + $(l + a)$ paquets de b croustillons $(ka + (l + a)b)$, et $(k + b)$ sachets de a croustillons + l paquets de b croustillons $((k + b)a + lb)$.

Si $\underline{c \in F}$: la commande de n $(= ab + c)$ croustillons est satisfaite car $n > (a - 1)(b - 1)$, notre seuil, et ce, probablement d'une seule façon.

En généralisant :

Si $n = qab$, n est probablement satisfaite de $(q + 1)$ façons différentes. Nous sommes donc arrivés à poser la conjecture suivante :

Soit $n \in [qba, q(b + 1)a[$, $n = qab + c$.
- Si $\underline{c \in P}$, n s'écrirait de $(q + 1)$ manières différentes.
- Si $\underline{c \in F}$, n s'écrirait de q façons différentes.

9 Ouverture si le nombre de paquets est supérieur à 2

Pour l'avenir, une autre question que l'on peut se poser est la suivante : “Que se passe-t-il quand le vendeur de croustillons propose 3 paquets contenant respectivement a, b et c croustillons ? Ou s'il propose n paquets de croustillons de a, b, c, d,... croustillons ?” En généralisant les résultats obtenus dans le cas $n = 2$, il nous semble clair qu'une condition nécessaire est que le $PGCD$ des nombres de croustillons dans chaque paquet soit égal à 1.

10 Conclusion

C'était amusant, formatif, une vraie dimension scientifique où la réponse est à chercher puis à démontrer. Réponse bien loin d'être servie sur un plateau d'argent.
Ce fut une très chouette aventure, autant pour les participants que pour l'accompagnateur.

Notes d'édition :

[1] La terminologie de « seuil »choisie par les auteurs ne correspond pas exactement à l'intuition qu'on peut en avoir dans l'usage courant. Pour eux,

- un seuil est valeur telle que toutes les valeurs qui lui sont supérieures peuvent être obtenues,
- un nombre n est un seuil optimal si c'est un seuil, et si c'est le plus petit possible (ce qui revient à dire que tous les entiers supérieurs ou égaux à n sont atteignables, mais que $n-1$ ne l'est pas).

On parlera aussi de seuil provisoire pour un nombre dont on a montré qu'il est un seuil, mais dont on ne sait pas encore s'il est optimal.

[2] L'argument peut s'expliquer ainsi : on a vu que tous les éléments de I_{b-1} s'écrivent sous la forme $ka+lb$, avec $k, l \geq 0$; or les éléments de I_{b-1} ne sont pas des multiples de a ; ils s'écrivent donc sous la forme $ka+lb$, avec $k \geq 0$ et $l > 0$. Donc en particulier les éléments de $](b-1)a, (b-1)a+b[$ sont de cette forme ; si on leur retranche b, on obtiendra des nombres de la forme $ka+mb$, avec $k, m \geq 0$. Donc tous les éléments de $](b-1)a-b, (b-1)a+b-b[$ sont atteignables.

[3] On notera que tout ce qui suit est conjectural.