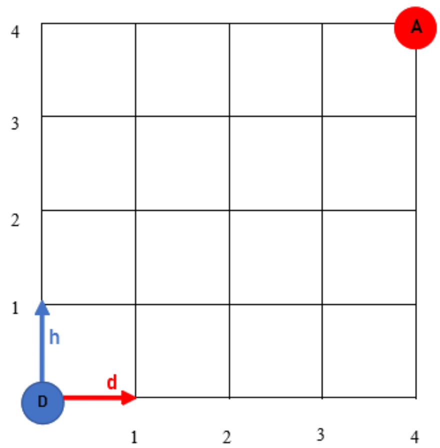
À la croisée des chemins

Année 2019-2020

Auteurs : Nathan RABIER, Sébastien BEAUCHAMP, Titouan WOJNAROWSKI (Terminale S).
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, Université de La Rochelle .

Dans cet article, nous proposons plusieurs résultats sur le problème du comptage de chemins sur une grille, éventuellement incomplète. Puis nous nous intéresserons à des grilles dans l'espace ou le long d'un cylindre.

1) Présentation du problème



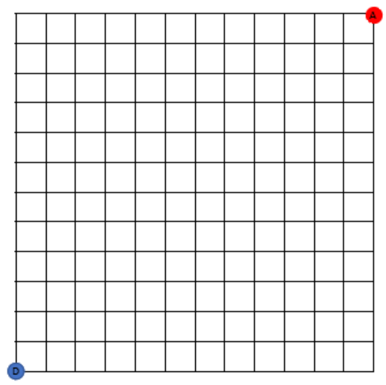
Notre but est de compter le nombre total de chemins allant d'un point D à un point A dans une grille, en n'autorisant que des déplacements "vers la droite" ou "vers le haut".
Cette grille peut avoir des segments manquants.

2) Le cas des quadrillages complets

Dans le cas où le quadrillage est de largeur k et de longueur l, et qu'il est complet (sans segment manquant), nous remarquons que cela revient à compter le nombre total de chemins qui vont k fois à droite, et qui sont toujours composés d'autant de déplacements au total. Il y en a $n = k + l$.

Ce qui revient à chercher le nombre total de chemins menant à k succès (*déplacements à droite*) en $n = k + l$ répétitions (*déplacements totaux*) (1). Nous avons vu en première que ce nombre total de chemins est le ***coefficient binomial*** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On pouvait le deviner car chaque sommet ailleurs que sur les bords bas et gauche est atteint par deux sommets précédents, ce qui amène aussi à la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.



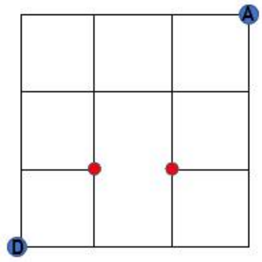
Par exemple, la grille ci-contre est de largeur k = 12 et de longueur l = 12, les chemins seraient composés de n = 24 déplacements totaux. Il y a donc $\binom{24}{12} = 2704156$ chemins qui vont de D à A.

En conclusion :

- Les grilles carrées complètes de largeur n ont $\binom{2n}{n}$ chemins possibles.
- Les grilles rectangulaires complètes de largeur n et longueur m ont $\binom{n+m}{n}$ chemins possibles.

3) Le cas des quadrillages incomplets à qui il manque 1 segment

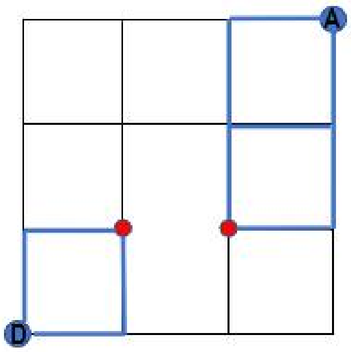
Afin d'expliquer la notation que nous utiliserons dans la suite, nous allons commencer par présenter notre étude sur trois exemples de quadrillages à qui il manque un segment.



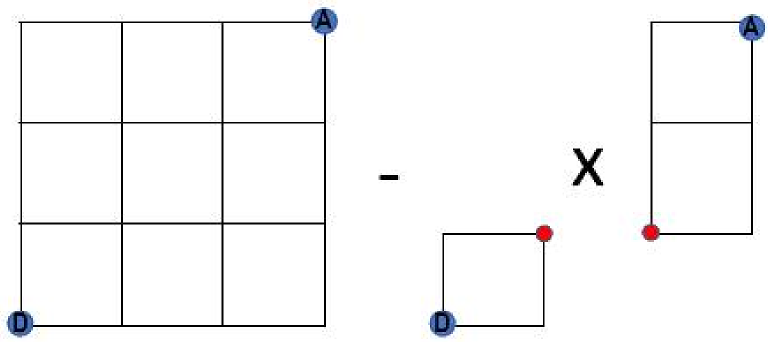
Exemple 1 : On considère la grille ci-contre.

Afin de calculer le nombre total de chemins allant de D à A, nous partons de la grille complète, et nous lui retirons le nombre de chemins qui seraient passés par le segment qui a été retiré.

Nous avons adopté la notation suivante :

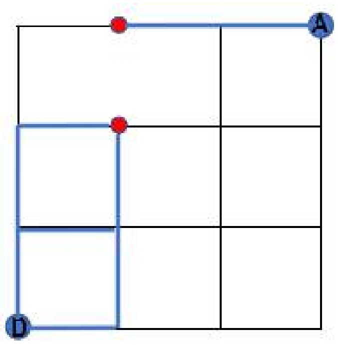


donne

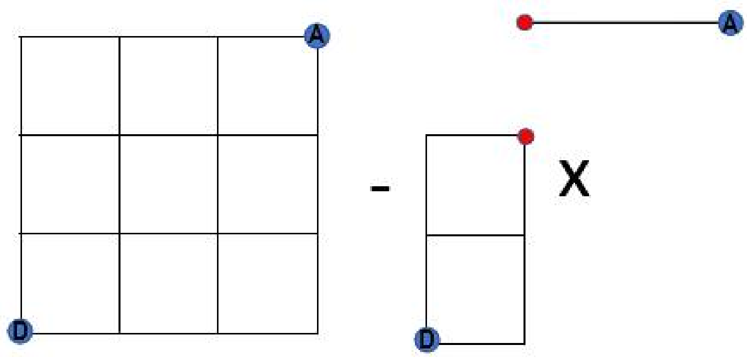


Les chemins allant de D au premier point rouge sont au nombre de 2 (*représentés par le carré*), et on multiplie ces 2 chemins par les 3 chemins allant de l'autre point rouge à A (*représentés par le rectangle vertical*). On trouve ainsi $\binom{6}{3}-\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}=20-2\times3=14$ chemins au total.

Exemple 2 :

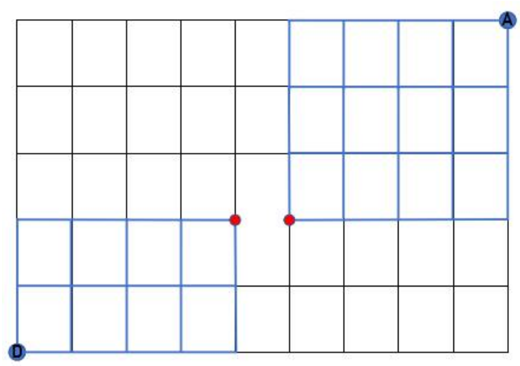


donne



On trouve $\binom{6}{3}-\binom{3}{1}\times\binom{2}{2}=20-3\times1=17$ chemins au total.

Exemple 3 : avec le quadrillage incomplet ci-contre :

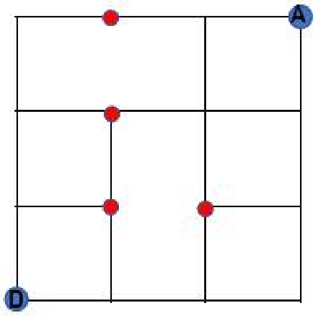


On trouve $\binom{14}{9}-\binom{6}{4}\times\binom{7}{4}=1477$ chemins au total.

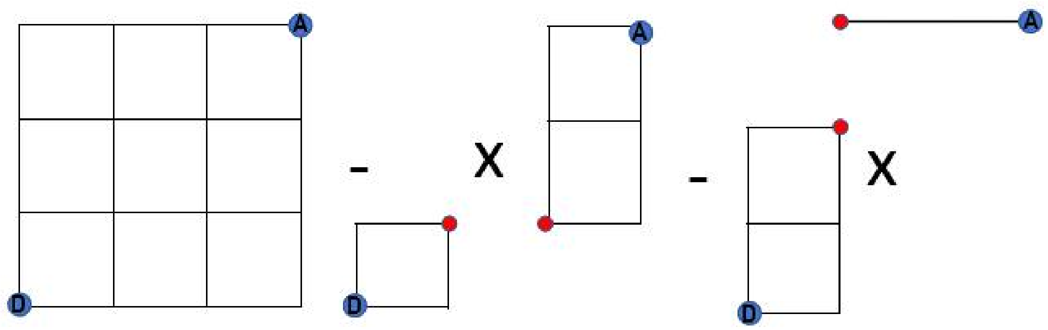
4) Le cas des quadrillages incomplets à qui il manque deux segments ou plus

Dans cette situation, il y a deux cas, selon qu'il existe des chemins qui passeraient par ces 2 segments ou non. Même si le premier cas est un cas particulier du second.

Cas où il n'existe pas de chemins qui passerait par les 2 segments retirés :

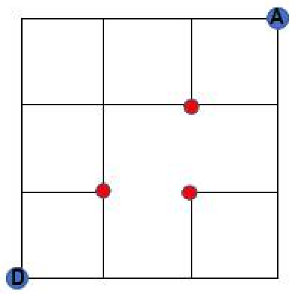


Nous le présentons sur le quadrillage ci-contre, mais notre résultat est général.
Il suffit tout simplement de soustraire séparément le nombre de chemins qui passeraient par l'un de ces segments, puis ceux qui passeraient par l'autre de ces segments.



Nous trouvons ainsi $\binom{6}{3}-\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}-\binom{3}{1}\times\binom{2}{2}=20-2\times3-3\times1=11$ chemins au total.

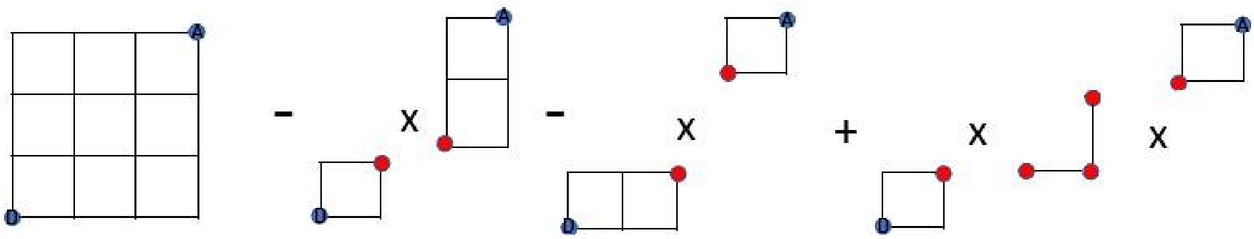
Cas où il existe au moins un chemin qui passerait par les 2 segments retirés :



Ce cas est illustré par le quadrillage ci-contre :

Formulation 1 :

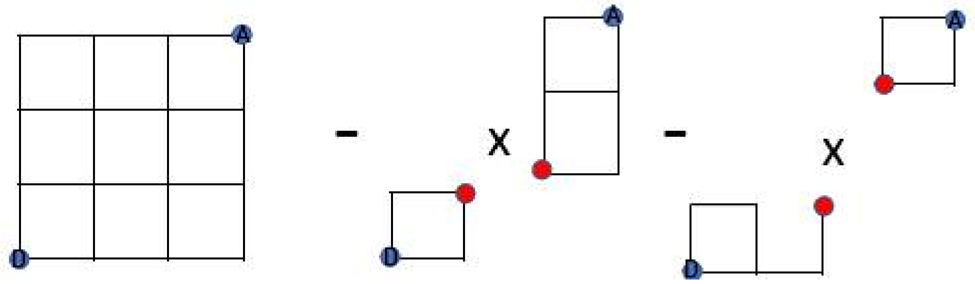
En reproduisant le calcul précédent, on constate que l'on aurait soustrait deux fois le nombre de chemins qui passeraient par ces deux segments.
Il faut donc rajouter ce nombre soustrait à deux reprises, ce qui nous donne :



On trouve $\binom{6}{3}-\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}-\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}+\binom{2}{1}\times1\times\binom{2}{1}=20-2\times3-3\times2+2\times1\times2=12$ chemins.

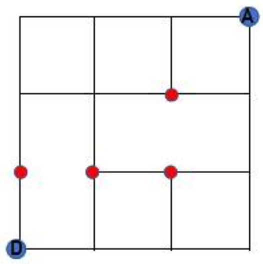
Formulation 2 :

Lorsque l'on soustrait le nombre de chemins qui passeraient par les segments retirés, nous pouvons prendre en compte les chemins déjà retirés avant. Ce qui donnerait ici :

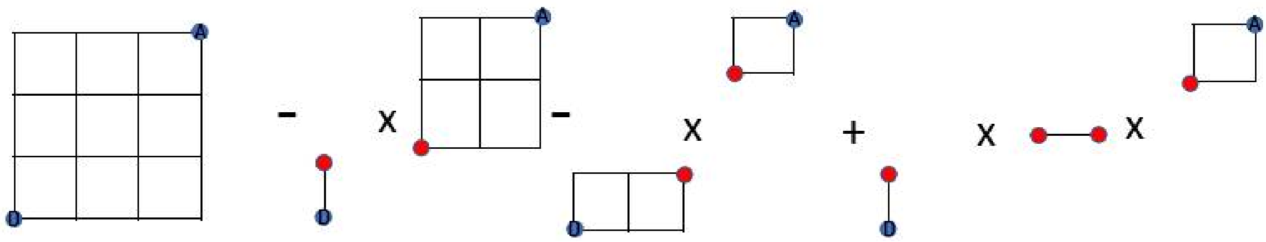


Dans le dernier terme, on a mis un graphe incomplet prenant en compte les chemins déjà retirés.
Et nous avons donc 20 – 6 – 2 = 12 chemins, qui est ce qui avait été (heureusement) trouvé avant.

Voilà ce que donnent ces deux formulations avec l'exemple ci-contre :

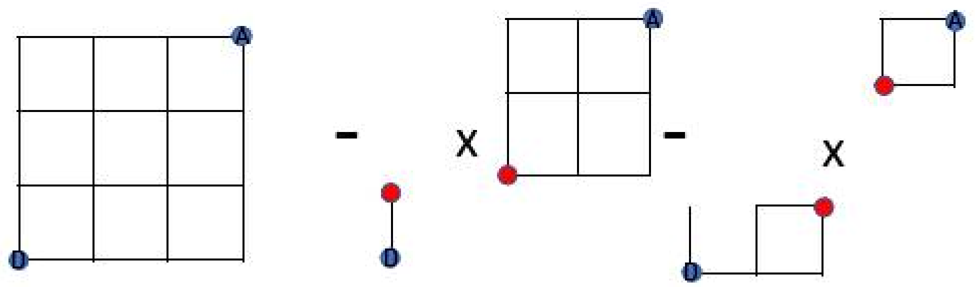


Formulation 1 :



On trouve $20-1\times6-3\times2+2=10$ chemins.

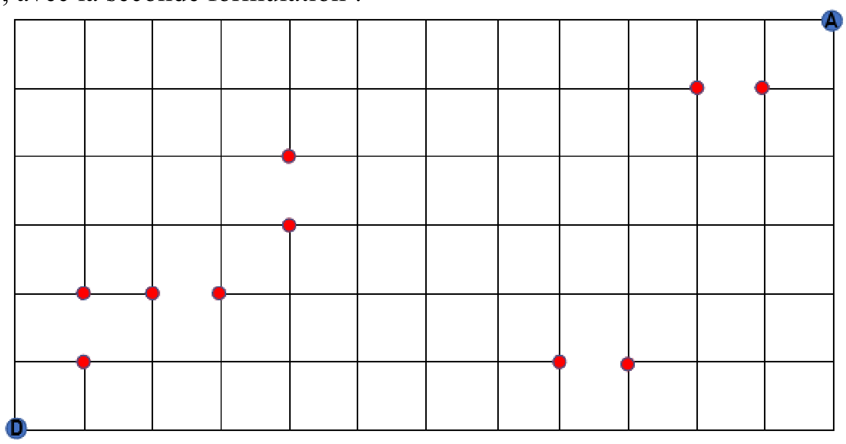
Formulation 2 :



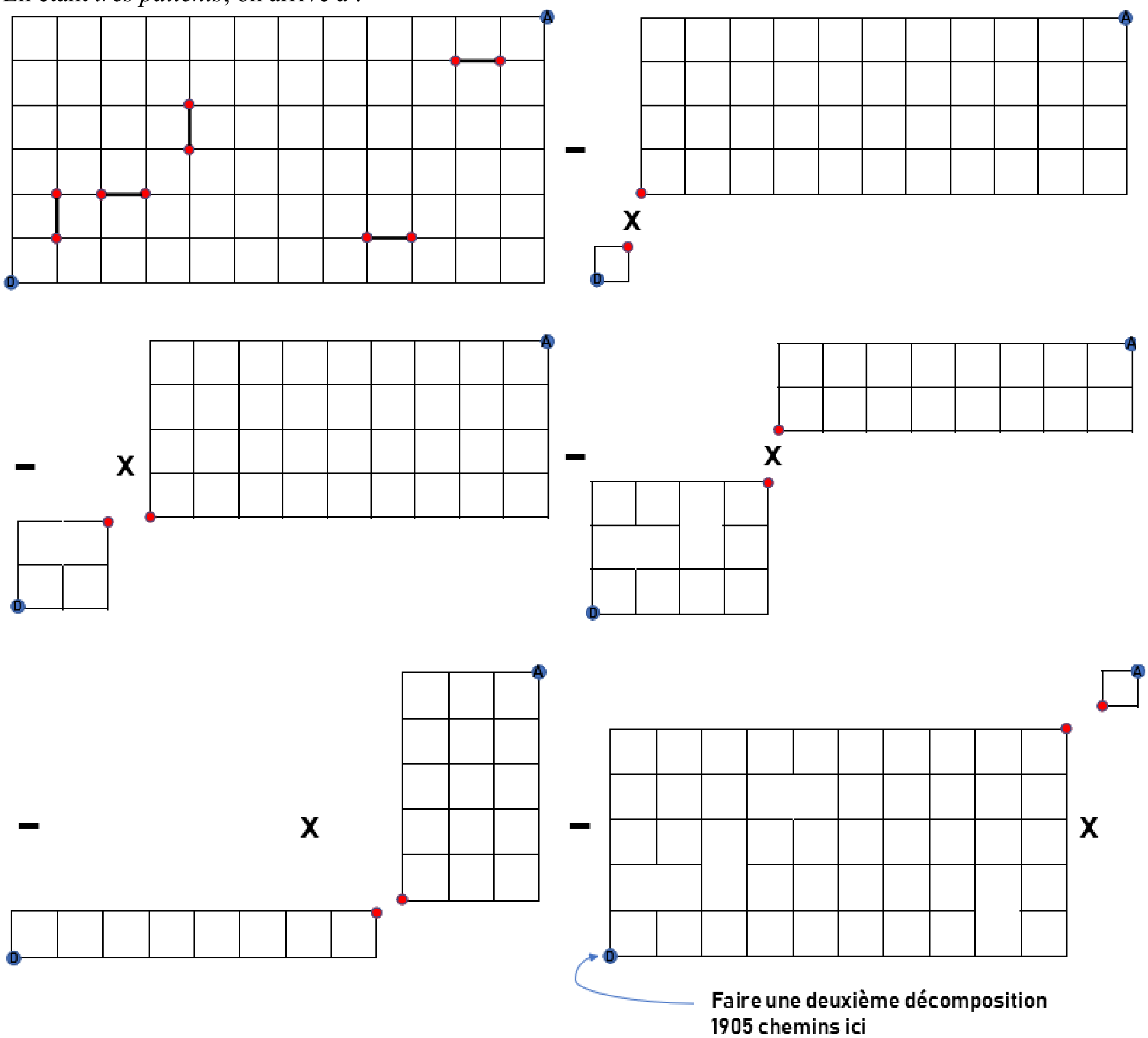
On trouve $20-1\times6-2\times2=10$ chemins aussi.

Notre méthode se généralise aux cas où l'on retire beaucoup de segments.

En voici un exemple, avec la seconde formulation :

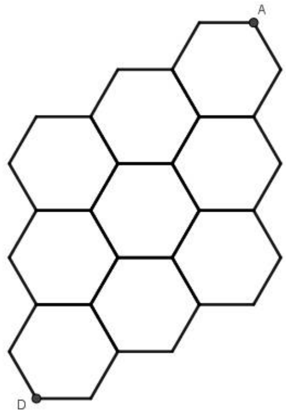


En étant *très patients*, on arrive à :



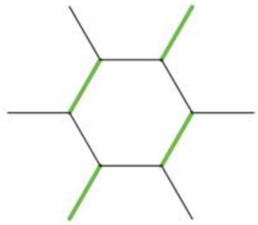
Ce qui donne $\binom{18}{12}-2\times\binom{15}{11}-4\times\binom{13}{9}-19\times\binom{10}{8}-\binom{9}{8}\times\binom{8}{3}-1905\times2=7805$ chemins.

5) Chemins sur un “quadrillage hexagonal”



Nous nous intéressons ici aux “quadrillages hexagonaux”, comme celui donné ci-contre. Et nous allons montrer que leur étude revient à étudier des quadrillages comme ceux vus précédemment.

Nous avons dû adapter les règles de déplacement à cette nouvelle situation, et nous en identifions trois possibles :

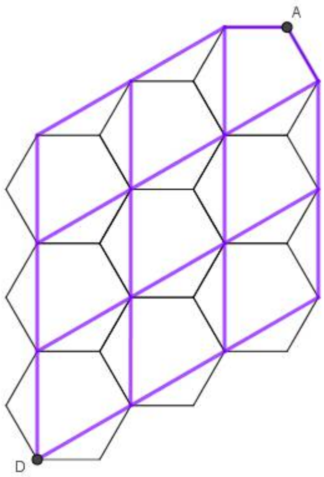


Nous avons remarqué que les déplacements de type C peuvent être négligés, car ils arrivent obligatoirement après un déplacement de type A ou un déplacement de type B.
Réciproquement, après un déplacement de type A ou un déplacement de type B, on suit forcément un déplacement de type C (sauf lors du tout dernier déplacement, qui mène à l’arrivée).

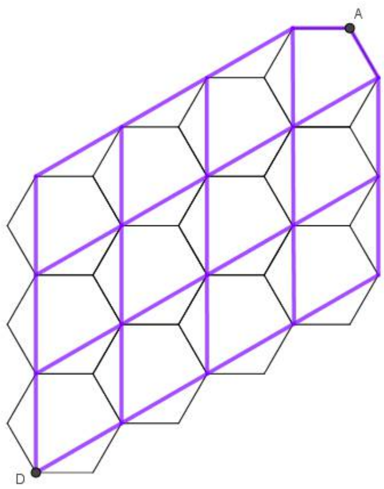
En notant a le nombre d’hexagones empilés sur la droite et b le nombre d’hexagones empilés sur le haut :
Le nombre c de déplacements de type C suivis en un chemin vaut $c=a+b-1$. Mais, comme ils sont sous-entendus aux types A et B, ils ne comptent pas dans le nombre de déplacements effectués en un chemin, qui est donc toujours égal à $n=a+b$ quel que soit le chemin suivi.

L’intérêt principal de ne pas considérer les déplacements de type C est que cela nous permet ainsi de revenir directement dans le cadre des quadrillages précédents.

$a = 3$
$b = 3$



$a = 4$
$b = 3$



Les déplacements “vers la droite” sont associés aux déplacements de type A, *et les déplacements « vers le haut » sont associés aux déplacements de type* B (*tous étant suivis d’un type* C).

<u>Enfin, lorsque l’on retire un segment dans ces “quadrillages hexagonaux” :</u>

- S’il était de type A ou de type B, on retrouve la même logique que précédemment, en retirant le segment “droite” ou “haut” correspondant.
- S’il était de type C, cela revient à retirer le déplacement de type A ET le déplacement de type B qui auraient du arriver avant (donc leurs déplacements “droite” et “haut” correspondants), sauf s’il se trouvait sur un bord.

6) « Quadrillages » dans les dimensions supérieures

Comme l'espace ajoute une troisième dimension pour se déplacer, la contrainte devient de n'autoriser que les déplacements “vers la droite”, “vers le haut”, ou “vers l'arrière”.

Il se trouve que le coefficient binomial se généralise avec la notion de ***coefficient multinomial*** (2) :

On note $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \ldots \times k_m!}$, où l'on a $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

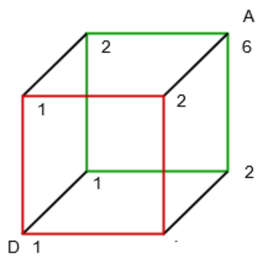
Dans notre contexte, le nombre m correspond au nombre de dimensions utilisées. Et ainsi :

- n représente le nombre total de déplacements (qui reste le même, quel que soit le chemin suivi).
- chaque k_i correspond au nombre de déplacements totaux dans la dimension i.

Par exemple, pour $m = 2$ dimensions, on a $k_2 = n - k_1$, et on trouve $\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$, qui est la formule du coefficient binomial, que nous avons utilisé dans le plan.

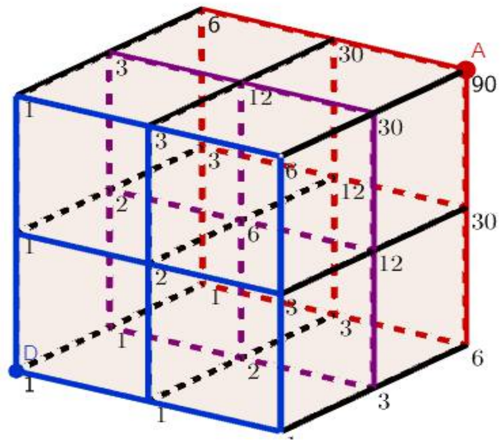
Pour $m = 3$ dimensions :

Dans le cas d'un cube de côté, 1, on trouve
$\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$ chemins possibles.

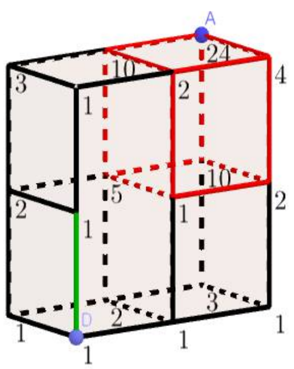


Dans le cas d'un cube de côté 2 :

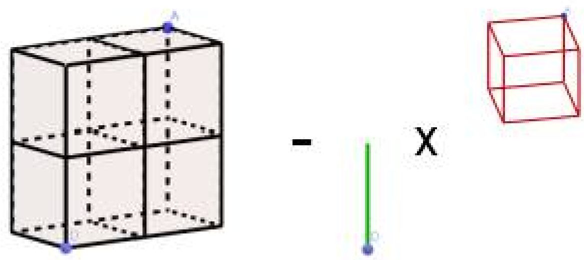
On trouve $\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$ chemins possibles.



Et si l'on retire un segment (ou plus), notre méthode présentée dans le plan se généralise :

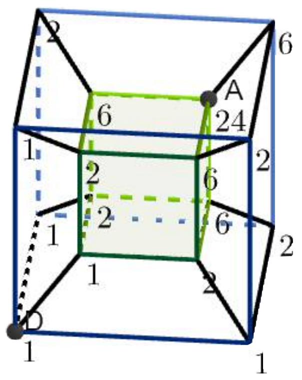


donne



Et on trouve bien $\binom{5}{2,1,2} - 1 \times \binom{3}{1,1,1} = 30 - 1 \times 6 = 24$ chemins possibles.

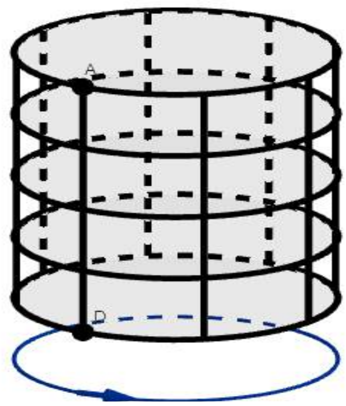
Testons le coefficient multinomial pour la dimension 4 :



Pour compter le nombre de chemins sur un *tesseract* (ou *hypercube*) dans un espace de dimension 4, on remarque que nous n'avons que des déplacements de longueur 1 dans chacune des quatre dimensions.

Il y a donc un nombre total de chemins pour aller de D à A qui est égal à $\binom{4}{1,1,1,1}=\frac{4\,!}{1\,!\times1\,!\times1\,!\times1\,!}=24$.

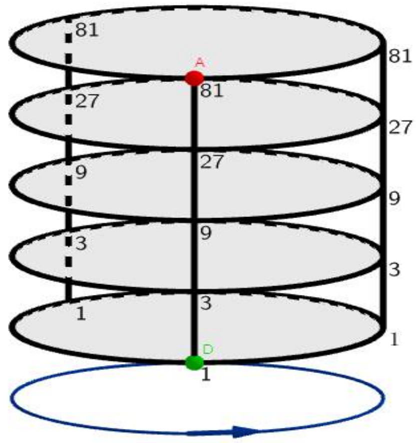
7) Chemins sur un cylindre



Le contexte est le suivant, on note :
- E le nombre d'étages
  (*le point* D *se trouve au rez-de-chaussée, donc à l'étage* 0).
- S le nombre d'"*escaliers"*
  (*les barres verticales permettant de changer d'étage*).

Dans la figure ci contre, on a donc $E = 4$ et $S = 8$.

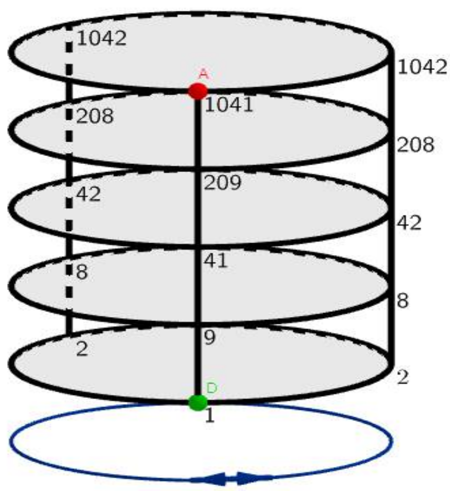
Si on ne permet que de monter` et de "tourner" dans un seul sens :



Premier constat :
Il n'est pas possible d'utiliser le coefficient binomial.
En effet, on constate que ***les chemins allant de D à A ne comportent pas tous le même nombre de déplacements*** *: Un chemin qui monte directement de D à A n'a pas la même longueur qu'un chemin où l'on a "tourné" au moins une fois.*

Néanmoins, on remarque rapidement que le nombre de chemins allant de D à A est égal à S^E .

Si on permet de tourner dans les deux sens :



On remarque que le nombre de chemins allant de D à A est égal à deux fois la somme du nombre de chemins allant de D à chaque point de l'étage inférieur, moins une fois le nombre de chemins allant de D au point en dessous de l'arrivée.
On constate aussi que la somme des nombres de chemins des points de l'étage E est $(2\,S-1)^{E+1}$ (3) .

Nos calculs nous amènent à

$$2\times\sum_{p=0}^{E}(2S-1)^{p}(-1)^{E-p}=2\times(-1)^{E}\times\sum_{p=0}^{E}\left(\left((-1)(2S-1)\right)^{p}\right)$$
$$=2(-1)^{E}\times\frac{1-\left((-1)(2S-1)\right)^{E+1}}{1-(-1)(2S-1)}=\frac{(-1)^{E}+(2S-1)^{E+1}}{S}$$

chemins.

Par contre si le point A est situé au dessus de D, il faut y ajouter $(-1)^{E+1}$.

Notes d'édition.

(1) Il s'agit simplement du nombre de façons de choisir k déplacements à droite (ou l déplacements vers le haut) parmi $n = k+l$ déplacements en tout. Il n'y a pas ici de répétitions (les *combinaisons avec répétitions* correspondent à des problèmes différents).

(2) Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ est le nombre de façons de répartir n éléments en m catégories comprenant respectivement $k_1, k_2, \ldots k_m$ éléments, donc ici de répartir les n déplacements parmi les m directions de façon que dans chaque direction i on ait k_i déplacements.

(3) On ne considère que les chemins ne repassant pas par un même point (les boucles et tous les chemins faisant plus d'un tour d'un étage sont exclus).
Dans ces "remarques", l'étage E et le point d'arrivée A peuvent être n'importe quel point intermédiaire, ce qui permet de faire une récurrence.
Pour compter le nombre de chemins arrivant à A, en prolongeant un chemin à partir du dernier point atteint à l'étage inférieur, il y a deux possibilités selon qu'on tourne dans un sens ou dans l'autre, sauf si c'était le point juste en dessous de A, auquel cas il n'y en a qu'une, la montée directe ; d'où la première remarque.
En notant $N(E)$ la somme des nombres de chemins arrivant aux points de l'étage E, on trouve donc $N(E)=S\times 2N(E-1)-N(E-1)=(2S-1)N(E-1)$. À l'étage de départ $E=0$, on a de même 2 chemins pour chacun des points sauf D pour lequel il n'y en a qu'un (le "chemin vide"), soit $2S-1$ chemins en tout et on trouvera bien par récurrence qu'en général $N(E)=(2S-1)^{E+1}$.
La formule suivante se montre de même par récurrence en partant du cas $E=0$ avec 2 chemins pour le cas où le point est distinct de D, et sinon en initialisant à 1 pour $E=0$, ce qui ne change que le terme de la somme pour $p=0$.