

CROCNUM

Année 2013- 2014

CARTERET Gabriel – COGNOT Nicolas – RADOJICIC Vido – THEILLIOL Achille – VANHUYSE Mathéo – Elèves de 6^{ème}

Collège G GHEPFER – VILLERS-les-NANCY

Enseignantes : Mme HIRIART – Mme KUNC

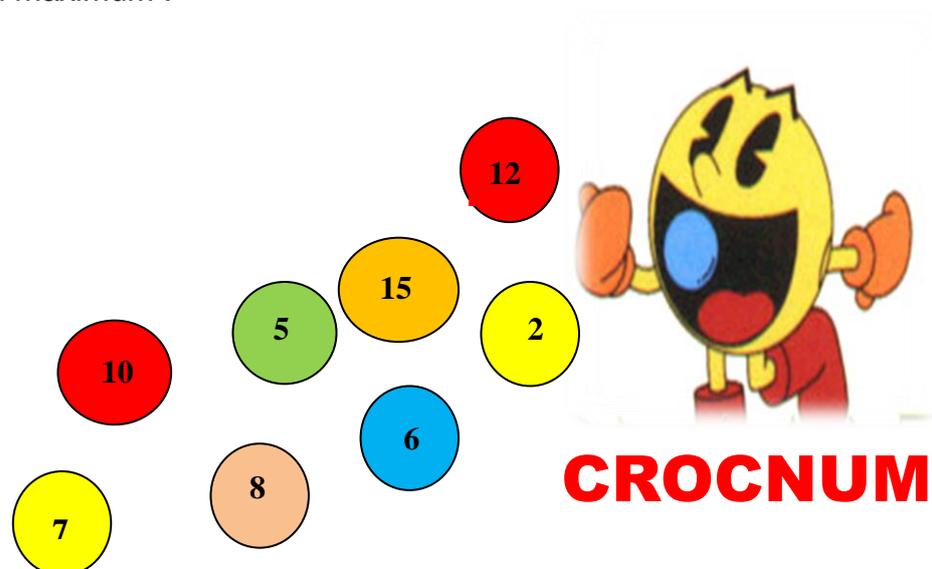
Chercheuse : Anne DE ROTON – Institut Elie Cartan de Lorraine

Sujet :

Crocnum est un gentil monstre. Il se nourrit de nombres. Il les aime tant qu'il veut en manger le plus possible. Mais Crocnum doit faire très attention : s'il se retrouve avec dans son ventre deux nombres dont la somme est égale à un autre nombre qu'il avale, alors il explose !

Crocnum vient de repérer un champ de nombres avec des nombres à perte de vue ! Il y a au moins tous les nombres de 1 à 100.

On doit aider Crocnum à choisir les nombres qu'il peut manger pour qu'il n'explose pas et pour qu'il en mange un maximum .



Variante : Crocnum a un problème digestif ! Il arrive que les nombres qu'il mange se dupliquent dans son ventre. Il peut par exemple manger 1 et se retrouver avec deux 1 dans le ventre... Que lui faire manger pour qu'il n'explose pas malgré ses problèmes digestifs.

Première partie

Crocnum est en bonne santé

Pas encore expérimenté, mais très affamé Crocnum avale sans réfléchir 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 ... tout va bien...



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Il est prêt à engloutir 42, quand heureusement il se dit :

STOP !!! $42 = 31 + 11$

Je ne dois pas manger 42 sinon j'explose.

Il faudra être très malin pour pouvoir manger un maximum de nombres

► Nous avons tout de suite dit à Crocnum :

Comme la somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair, tu peux manger tous les nombres impairs sans calculer, tu n'exploseras pas.

Crocnum est alors très heureux, il peut manger la moitié de l'ensemble de tous les nombres de 1 à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Mais insatisfait car très gourmand, Crocnum en veut encore plus !

Le pourra-t-il ?



Mais j'en veux plus...

► Pour l'aider, nous nous imposons une méthode pour manger les nombres.

Nous décidons que Crocnum doit manger dans l'ordre tous les nombres qu'il peut à partir d'un nombre choisi au départ.

Par exemple, si on choisit de commencer par manger 4, on peut manger 5, 6, 7 et 8.

On ne peut pas manger $4+5=9$, $4+6$, $4+7$,....., $8+6$, jusqu'à $8+7=15$. On les barre dans le tableau.

On mange 16, on barre $16+4 = 20$ jusqu'à

$16+8=24$.

On mange 17, on barre $17+4=21$ jusqu'à $17+8=25$ et $17+16=33$.

On mange 18, on barre $18+4=22$ jusqu'à $18+8=26$ et $18+16=34$ et $18+17=35$.

On mange 19, on barre $19+4=23$ jusqu'à $19+8=27$ et $19+16=35$ jusqu'à $19+18=37$.

On mange 28, on barre $28+4=32$ jusqu'à $28+8=36$ et $28+16=44$ jusqu'à $28+19=47$.

On mange 29, on barre $29+4=33$ jusqu'à $29+8=37$ et $29+16=45$ jusqu'à $29+19=48$ et $29+28$

On mange 30, on barre $30+4=34$ jusqu'à $30+8=38$ et $30+16=46$ jusqu'à $30+19=49$ et $30+28$ et $30+29$.

On mange 31, on barre $31+4$ jusqu'à $31+8$ et $31+16$ jusqu'à $31+19$ et $31+28$ jusqu'à $31+30$

On mange 40, on barre $40+4$ jusqu'à $40+8$, etc.

Et on continue ainsi jusqu'au bout du champ de nombres.

Remarque : Des nombres sont barrés plusieurs fois.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

▪ **Première remarque :**

Crocnum ne doit pas commencer par manger 1, parce que dès qu'il mangera un autre nombre, il ne pourra pas manger son suivant et il ne pourra ainsi pas manger plus de la moitié des nombres, donc moins de 50.

▪ **En commençant par manger 2, Crocnum peut manger les nombres coloriés en orange.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **35 nombres sur les 100 !!!**

Nous constatons une périodicité pour les nombres que l'on peut manger à partir de 6. (barres rouges)

- **En commençant par manger 3**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en jaune.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **34 nombres sur les 100 !!!**

Nous constatons aussi une périodicité pour les nombres que l'on peut manger à partir de 9. (barres rouges)

- **En commençant par manger 5**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en rose.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **36 nombres sur les 100 !!!**

Nous avons toujours une périodicité pour les nombres que l'on peut manger à partir de 15. (barres rouges)

- **Nous avons poursuivi ainsi jusqu'à arriver à commencer par 50 sans jamais pouvoir manger plus de la moitié des nombres.**

- **Et en commençant par manger 50**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en bleu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum peut manger **51 nombres sur les 100 !!!**
Il sera heureux, il pourra en manger un nombre de plus.



**Je mange 51 nombres.
La moitié + 1 !!**

Bien sûr ! La somme de deux nombres supérieurs à 50 est supérieure à 100.

▪ Nous avons alors dit à Crocnum :

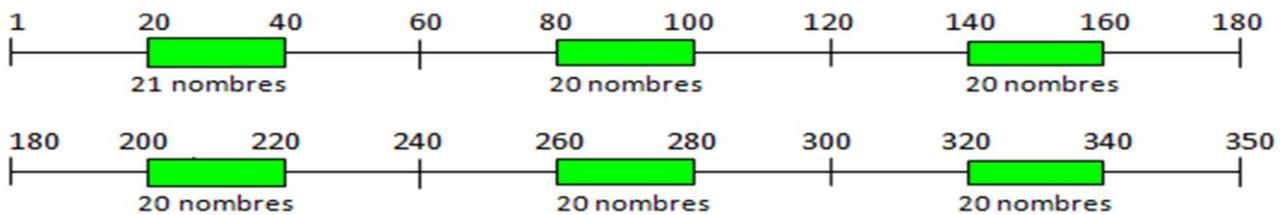
Si tu te trouves devant le champ de tous les nombres de 1 à 100, tu pourras manger 51 nombres dans tout ce champ de nombres. Il te suffit de manger les 51 plus grands nombres et tu n'exploseras pas. C'est le plus de nombres que tu puisses engloutir avec notre méthode.



Super, c'est facile, je peux déguster sans calcul !!!

▪ Nous nous sommes alors intéressés aux périodes et nous avons étendu le champ de nombres à perte de vue.

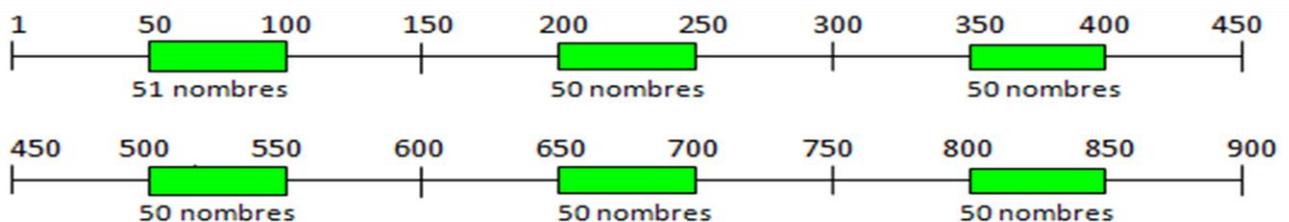
▪ Dans le cas où Crocnum décide de commencer par manger 20, nous représentons en vert les nombres qu'il peut manger :



Ainsi, on peut dire que la proportion de nombres mangés dépend de l'étendue du champ de nombres.

Entiers de 1 à ...	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240
Nombres mangés	21	21	22	41	41	42	61	61	62	81	81
Proportion ≈	1/2	1/3	1/4	2/5	1/3	2/7	3/8	1/3	3/10	4/11	1/3

▪ Dans le cas où Crocnum décide de commencer par manger 50, nous représentons en vert les nombres qu'il peut manger :

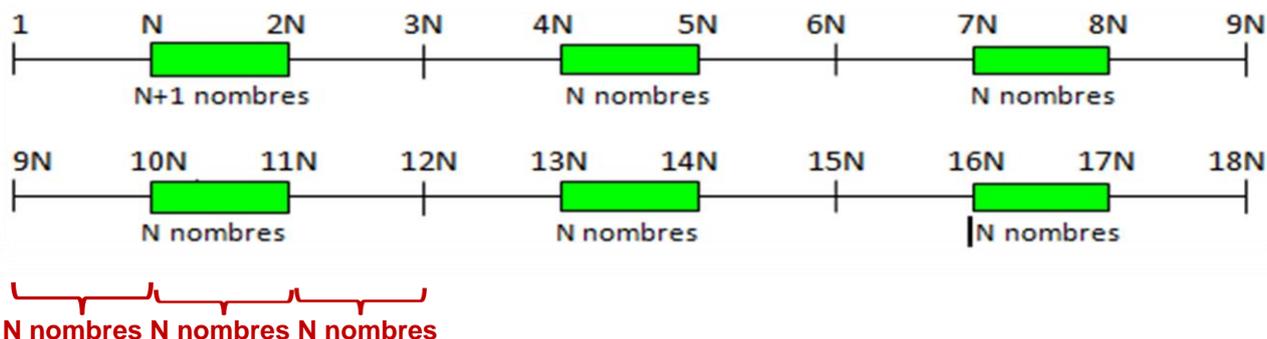


La proportion de nombres mangés dépend toujours de l'étendue du champ de nombres.

Entiers de 1 à ...	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Nombres mangés	51	51	52	101	101	102	151	151	152	201	201
Proportion ≈	1/2	1/3	1/4	2/5	1/3	2/7	3/8	1/3	3/10	4/11	1/3

▪ Dans tous les cas, nous avons vérifié que la répartition des nombres que l'on pouvait manger était la suivante :

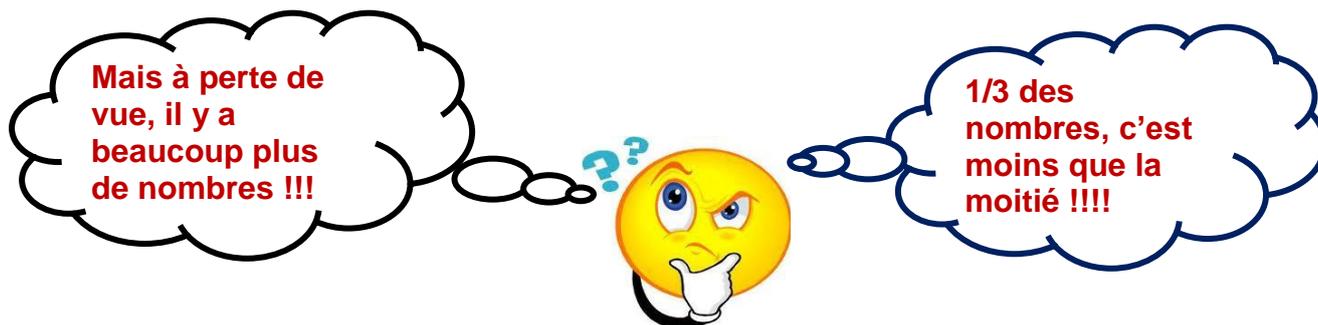
Si on commence à manger N , alors on peut manger tous les nombres de N à $2N$, puis de $4N$ à $5N-1$, de $7N$ à $8N-1$, de $10N$ à $11N-1$, etc.



On a donc des périodes dans lesquelles on ne peut manger que le tiers des nombres.

▪ Nous avons aussi dit à Crocnum :

Si tu te trouves devant un champ de nombres consécutifs à partir de 1 et à perte de vue (ensemble infini des entiers consécutifs), avec notre méthode de dégustation, tu ne pourras pas manger plus du tiers des nombres.



Remarque : Manger les nombres impairs ne rentre pas dans notre méthode de dégustation, car avec notre méthode, si on commence par manger 1, on doit manger 2 qui est pair, puis on ne peut manger 3 qui est impair.

On retrouvera le cas des nombres impairs dans la suite de l'exposé (Crocnum malade).

► Mais existe-t-il d'autres méthodes pour manger encore plus de nombres dans le champ de tous les nombres de 1 à 100 ?

On choisit au début, de manger quelques nombres au hasard (sans exploser !!!) puis à partir d'un nombre donné, de manger tout ce que l'on peut.

Nous n'avons pas trouvé d'exemples où Crocnum peut manger plus de nombres, mais nous avons aussi retrouvé des périodes à partir d'un certain rang.

▪ Par exemple, si on décide de manger 2 et 4 puis tous les nombres que l'on peut à partir de 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On finit par manger 2 nombres sur 6 à partir de 8.

▪ Autre exemple, si on décide de manger 5 et 9 puis tous les nombres que l'on peut à partir de 13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On finit par manger 9 nombres sur 32 à partir de 13.

Après de nombreux essais, nous n'avons rien trouvé de concluant.

Deuxième partie

Crocnum est tombé malade.

Crocnum a un problème digestif !

Il arrive que les nombres qu'il mange se dupliquent dans son ventre.

Il peut par exemple manger 1 et se retrouver avec deux 1 dans le ventre...

On doit aider Crocnum pour qu'il mange le plus de nombres possibles et n'explose pas malgré ses problèmes digestifs.

► **Comme quand Crocnum n'était pas malade, nous imposons la même méthode pour manger les nombres.** Il doit manger dans l'ordre tous les nombres qu'il peut à partir d'un nombre choisi au départ dans le champ de tous les nombres de 1 à 100.

- **En commençant par manger 1**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en violet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On retrouve tous les nombres impairs.



- **En commençant par manger 2**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en orange.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **40 nombres sur les 100 !!!**

Nous constatons aussi une périodicité pour les nombres que l'on peut manger.
Crocnum peut manger 2 nombres sur 5 à partir de 1 cette fois.

- **En commençant par manger 3**, Crocnum peut manger les nombres coloriés en jaune.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **38 nombres sur les 100 !!!**

Nous constatons aussi une périodicité pour les nombres que l'on peut manger.
Crocnum peut manger 3 nombres sur 8 à partir de 1 également.

- En commençant par manger 5, Crocnum peut manger les nombres coloriés en rose.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Crocnum ne peut manger que **35 nombres sur les 100 !!!**

Nous constatons aussi une périodicité pour les nombres que l'on peut manger.
Crocnum peut manger 5 nombres sur 14 à partir de 1.

- Nous avons poursuivi ainsi jusqu'à arriver à commencer par 50 sans pouvoir manger plus de la moitié des nombres .

- Et en commençant par manger 50, Crocnum peut manger les nombres coloriés en bleu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

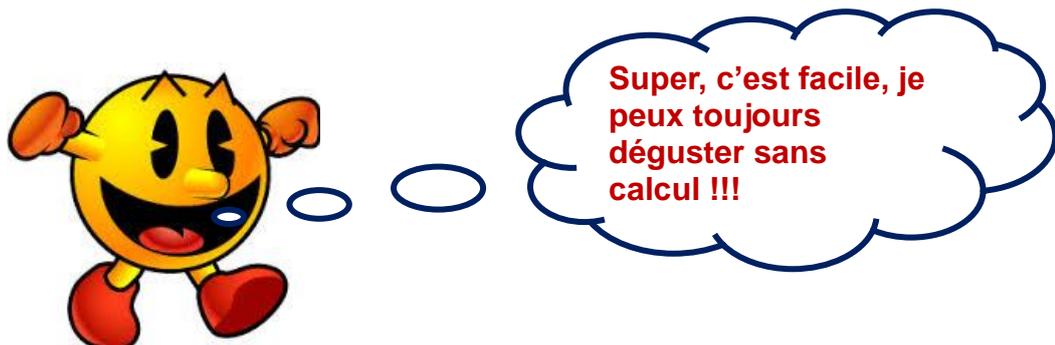
Crocnum peut manger **50 nombres sur les 100 !!!**



- Il peut aussi manger les nombres de 51 à 100, c'est pareil ! Et c'est la moitié des nombres.

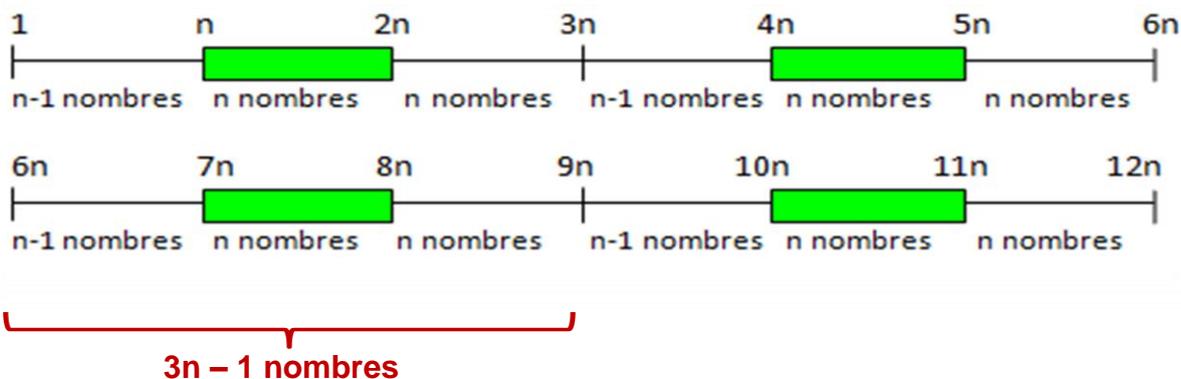
- Nous avons alors dit à Crocnum :

Si tu es malade et que te trouves devant le champ de tous les nombres de 1 à 100, tu ne pourras manger avec notre méthode que 50 nombres dans tout le champ des nombres. Il te suffit de manger les nombres impairs, ou tous les nombres de 51 à 100 et tu n'exploseras pas. C'est le plus de nombres que tu puisses engloutir.



▪ Nous avons alors regardé comment étaient répartis les nombres que Crocnum pouvait manger et nous avons étendu le champ des nombres à perte de vue.

Nous avons constaté que si Crocnum choisit de commencer par manger le nombre n , sans exploser, il peut manger n nombres, puis il doit éliminer $2n - 1$ nombres, il recommence à manger n nombres puis il en élimine de nouveau $2n - 1$, et ainsi de suite jusqu'au bout du champ de nombres consécutifs.



Sur une période, Crocnum peut donc manger n nombres sur $3n - 1$ nombres. Nous avons alors dressé le tableau suivant :

1 ^{er} nombre mangé	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Proportion	$1/2$	$2/5$	$3/8$	$4/11$	$5/14$	$6/17$	$7/20$	$8/23$	$9/26$	$n/(3n - 1)$

On constate que les proportions partent de $1/2$ et diminuent pour s'approcher de plus en plus de $1/3$ au fur et à mesure que le premier nombre mangé devient grand. Crocnum mangera donc le plus de nombres s'il commence par manger 1, donc en mangeant les nombres impairs.

▪ Nous avons aussi dit à Crocnum :

Bonne nouvelle, même si tu es malade et si tu te trouves devant un champ de nombres à partir de 1 et à perte de vue (ensemble infini des entiers consécutifs), tu pourras manger la moitié des nombres avec notre méthode de dégustation, il te suffit de manger tous les nombres impairs.



Chouette, c'est mieux que quand je n'étais pas malade !!!

Finalement nous avons fini par dire à Crocnum :

Nous sommes désolés Crocnum, mais nous n'avons pas réussi à faire mieux .
Mais attention à toi, la gourmandise est un vilain défaut....