Critère de divisibilité avec la somme des chiffres.

Année 2016-2017

Élèves : Paweł Arendt, Tomasz Dunicz, Alicja Durka, Joanna Szczepańska, Karol Zalewski
Établissement : Lycée bilingue Żmichowska, Varsovie, Pologne
Enseignante : Mme Jolanta Otrębska
Chercheur : M. Marcin Moszyński, Université de Varsovie
Consultations linguistiques : Mme Justyna Piątek

Présentation du sujet

On connait bien les critères de divisibilité par 3 et 9. Notre but c'était de vérifier s'il existe les mêmes critères pour d'autres diviseurs. On veut donc trouver tous les nombres naturels k≥2 vérifiant le théorème ci-dessous :

Le nombre x est divisible par k si et seulement si la somme des chiffres du nombre x est divisible par k

Exemples:

pour x=3 732:3= 244 ; 7+3+2=12 3|12

pour x=9 9513:9=1057; 9+5+1+3=18 9|18

On veut aussi essayer de résoudre ce problème dans d'autres systèmes de numération, par exemple dans le système septénaire.

***

Pour commencer on a décidé de prouver le critère de divisibilité par 9.

Théorème :

Soit un nombre entier $x=c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + \dots + c_n 10^n$ (1)

et on note $s(x)=c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$ la somme de ses chiffres.

Le nombre x est divisible par 9 si et seulement si s(x) est divisible par 9.

Démonstration :

Considérons

(*) $x=c_0 + c_1 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \dots + c_n 10^n$

$=(c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n) + (10-1)c_1 + (10^2-1)c_2 + (10^3-1)c_3 + \dots + (10^n-1)c_n$

$=s(x) + 9c_1 + 99 c_2 + 999c_3 + \dots + 99\dots9c_n = s(x) + 9(c_1 + 11 c_2 + 111c_3 + \dots + 11\dots1 c_n)$

Si 9|s(x) alors 9|x

D'après (*) on a: $x=s(x)+ 9(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)$

D'après l'hypothèse s(x) est divisible par 9, $9(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)$ l'est aussi alors x est divisible par 9

Si 9|x alors 9|s(x)

D'aprés (*) on a: $s(x)=x - 9(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)$

D'après l'hypothèse x est divisible par 9, $9(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)$ l'est aussi alors s(x) est divisible par 9

La démonstration est analogue pour le critère de divisibilité par 3.(2)

***

Notre deuxième but était de trouver d'autres diviseurs k vérifiant l'équivalence:

x est divisible par k $\Leftrightarrow$ la somme de chiffres du nombre entier x est divisible par k

D'abord on a essayé de vérifier cette équivalence pour les diviseurs de 2 à 27. On a trouvé des contre-exemples pour tous les nombres sauf 3 et 9. Voilà un tableau avec nos résultats:

k	x est divisible par k et s(x) n'est pas divisible par k	x n'est pas divisible par k et s(x) est divisible par k
2	10	11
3	-	-
4	12	13
5	10	14
6	12	15
7	14	16
8	16	17
9	-	-
10	10	19
11	11	29
12	12	39
13	13	49
14	14	59

k	x est divisible par k et s(x) n'est pas divisible par k	x n'est pas divisible par k et s(x) est divisible par k
15	15	69
16	16	79
17	17	89
18	18	99
19	19	199
20	20	299
21	21	489
22	22	499
23	23	599
24	24	699
25	25	799
26	26	899
27	27	1899

D'après le tableau on a:

- Pour les nombres k à 1 seul chiffre le critère de divisibilité est vrai seulement pour les diviseurs 3 et 9. On a trouvé des contre-exemples pour d'autres diviseurs.

- Ce critère n'est pas vrai pour les diviseurs de 10 à 27 car les diviseurs eux mêmes sont contre-exemples

Supposons(3) que ce critère n'est pas vrai pour tous les diviseurs $k \geq 10$.

Théorème :

Dans le système décimal le critère de divisibilité avec la somme des chiffres est vrai seulement pour 3 et 9.

<u>Démonstration</u> :

- Pour les diviseurs à 1 seul chiffre on a trouvé des contre-exemples pour k= 2,4,5,6,7,8.
- Pour les diviseurs k supérieurs à 9 on a :

$$s(k)=c_0 + c_1 + c_2 +...+c_n < c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 +...+10^nc_n=k$$

(au moins un parmi les chiffres c_1, c_2 , ... , c_n n'est pas égal à zéro)

La somme des chiffres s(k) est toujours inférieure à k donc x=k est bien sûr divisible par k et s(x)=s(k) n'est pas divisible par k.

***

Après avoir fini cette partie, on a décidé de vérifier ce théorème dans d'autres systèmes numériques. Mais avant de le faire, on a dû apprendre quelque chose sur ces systèmes.

Regardons, par exemple, quelques nombres dans le système décimale et leurs équivalents du système septénaire :

Système décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Système septénaire	0	1	2	3	4	5	6	**10**	11	12	13	14	15	16	**20**

Dans le systéme septénaire nous utilisons les chiffres de 0 à 6 parce que le chiffre 7 « joue le rôle de 10 » (est la base).

Notation : $166_{(7)}$ le nombre aux chiffres 1, 6 et 6 (écrit dans le système septénaire)

$166_{(10)}$ le nombre aux chiffres 1, 6 et 6 (écrit dans le système décimal)

Pour transformer un nombre écrit dans le système décimal en système septénaire on doit diviser ce nombre par 7 , parce que 7 est la base du système septénaire.

Exemple (4):

	97	7	**6**	97:7=13 r 6
13:7=1 r	13	7	**6**	6
	1	7	**1**	1:7=0 r 1
	0			

Le reste de la division du nombre 97 par 7 donne le dernier chiffre, puis on recommence avec le quotient

$97_{(10)} = 166_{(7)}$

Vérification: $166_{(7)} = 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 49 + 42 + 6 = 97_{(10)}$

***

Après avoir démontré que le critère de divisibilité avec la somme des chiffres est vrai pour 3 et 9, on a remarqué que 3 et 9 sont des diviseurs de 9. On a alors formulé l'hypothèse(5) suivante:

Dans le système septénaire le critère de divisibilité avec la somme des chiffres est vrai pour tous les diviseurs positifs > 1(6) du nombre 6.

Nous avons vérifié notre hypothèse sur quelques exemples :

$2|31_{(7)}$ $3+1=4$ et $2|4$

$6|24_{(7)}$ $2+4=6$ et $6|6$

$2|1111_{(7)}$ $1+1+1+1=4$ et $2|4$

$3|21_{(7)}$ $2+1=3$ et $3|3$

Théorème:

Soit un nombre entier $x=c_0 +c_1 7^1+ c_2 7^2 + \ldots + c_n 7^n$

et on note $s(x)=c_0 + c_1 + c_2 +\ldots+c_n$ la somme de ses chiffres.

Le nombre x est divisible par 6 si et seulement si s(x) est divisible par 6.

Démonstration:

Considérons

(*) $x=c_0 + c_1 7^1 + c_2 \cdot 7^2 + \ldots + c_n 7^n$

$=(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n) + (7-1)c_1 + (7^2-1)c_2 + (7^3-1)c_3 + \ldots + (7^n-1)c_n$

$=s(x) + 6c_1 + 66\, c_2 + 666c_3 + \ldots + 66\ldots6c_n = s(x) + 6(c_1 + 11\, c_2 + 111c_3 + \ldots + 11\ldots1\, c_n)$

Si 6|s(x) alors 6|x

D'après (*) on a: $x= s(x) + 6(c_1 + 11\, c_2 + 111c_3 + \ldots + 11\ldots1\, c_n)$

D'après l'hypothèse s(x) est divisible par 6, $6(c_1 + 11\, c_2 + 111c_3 + \ldots + 11\ldots1\, c_n)$ l'est aussi alors x est divisible par 6

Si 6|x alors 6|s(x)

D'aprés (*) on a: $s(x)=x - 6(c_1 + 11\, c_2 + 111c_3 + \ldots + 11\ldots1\, c_n)$

D'après l'hypothèse x est divisible par 6, $6(c_1 + 11\, c_2 + 111c_3 + \ldots + 11\ldots1\, c_n)$ l'est aussi alors s(x) est divisible par 6

La démonstration est analogue pour le critère de divisibilité par 3 et 2.

***

En conclusion on formule l'hypothèse:

Dans les systèmes de numération de base p le critère de divisibilité avec la somme des chiffres est vrai pour tous les diviseurs positifs ≥ 2 du nombre p–1.

Exemples:

Pour le système de base 5 et les diviseurs k: 2 ou 4

$2|13_{(5)}$ 3+1=4 et 2|4

$4|13_{(5)}$ 1+3=4 et 4|4

Théorème:

Soit un nombre entier $x=c_0 + c_1 p^1 + c_2 p^2 + \ldots + c_n p^n$

et on note $s(x)=c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ la somme de ses chiffres(1).

Le nombre x est divisible par (p-1) si et seulement si s(x) est divisible par p-1.

Démonstration:

Considérons

(*) $x=c_0 + c_1p^1 + c_2 \cdot p^2 + \ldots + c_n p^n$

$=(c_0 + c_1 + c_2 +\ldots+ c_n) + (p-1)c_1+ (p^2-1)c_2 + (p^3-1)c_3+ \ldots + (p^n-1)c_n$

Mais $P^n-1 = (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)$

Alors

$x=s(x)+ (p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$

Si (p-1)|s(x) alors (p-1)|x

D'après (*) on a: $x= s(x)+ (p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$

D'après l'hypothèse s(x) est divisible par p-1,

$(p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$

l'est aussi alors x est divisible par p-1

Si (p-1)|x alors (p-1)|s(x)

D'après (*) on a: $s(x)=x - (p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$

D'après l'hypothèse x est divisible par p-1,

$(p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$

l'est aussi alors s(x) est divisible par p-1

La démonstration est analogue pour le critère de divisibilité par tous les diviseurs positifs de (p-1).

***

Ainsi, nous avons réussi à généraliser notre critère de divisibilité pour chaque système de numération, et nous espérons que nos lecteurs le trouveront intéressant.

Notes d'édition

(1) Précisons ici que les c_i sont des entiers compris entre 0 et 9

(2) En effet ! il suffit de remarquer que 9 est divisible par 3, qu'on peut donc mettre en facteur 3 dans $9(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)= 3x3(c_1+ 11\, c_2+ 111c_3+\ldots+11\ldots1\, c_n)$

(3) C'est probablement « montrons » qu'il faut écrire à la place de « supposons »

(4) L'écriture de la division euclidienne pour la conversion en base 7 n'est pas convenable. Il faudrait plutôt écrire 97 = 13*7+6 etc...

(5) C'est ce qu'on appelle une conjecture, plutôt qu'une hypothèse

(6) Il s'agit des nombres entiers 2,3 et 6

(7) Précisons ici que les c_i sont des entiers compris entre 0 et 6

(8) En effet ! il suffit de remarquer que si k divise (p-1), on peut mettre en facteur k dans $(p-1)(c_1+ (p+1)c_2 +\ldots+ (p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1)c_n)$