Rangs de plants

Année 2021-2022

Lalie ANDRE et Laëtitia RINGEVAL, élèves de 3°

Etablissement : Collège Clos de Pouilly

Professeure : Mme. Pradel

Chercheur : Daniele Faenzi

<u>Sujet :</u>

Jean-Jacques cultive des fraises à Labastide-Paués (Haute-Garonne). Il aime bien planter ses pieds de fraises en rangs de trois. Il a 252 pieds et il sait qu'ils rentreront parfaitement dans ses rangs car 252 est divisible par trois, du fait que 2+5+2=9 et 3 divise 9.

Question 1. Jean-Jacques veut expliquer aux autres cultivateurs pourquoi cette règle marche, pouvez-vous l'aider ?

Jean-Marie, un copain de Jean-Jacques, préfère faire des rangs de sept plants et aimerait bien, lui aussi, avoir une règle simple pour savoir si 39 374 041 pieds rentrent bien dans ses rangs. Jean Jacques trouve le résultat suivant :

1x1+4x3+0x2-4x1-7x3-3x2+9x1+3x3=0

et 0 est divisible par 7, donc oui 39 374 041 est divisible par 7.

Question 2. Pouvez-vous apprendre à Jean-Marie la règle trouvée par Jean-Jacques puis expliquer aux deux copains pourquoi elle fonctionne ?

Les exploits de Jean-Marie ont un écho puissant dans les environs, certains paysans vont le consulter comme s'il s'agissait d'un oracle. Un troisième cultivateur, Jean-Baptiste, pratique des rangs de 19 pieds.

Question 3. Pouvez-vous aider Jean-Marie à établir une règle concernant la divisibilité par 1972

Le soir, épuisé par sa journée de labeur, parfois Jean-Jacques se pose des questions. Est-ce qu'on pourrait trouver des règles de divisibilité pour n'importe quel nombre n ? Combien d'opérations du type somme et produit devrais-je faire pour savoir si m est divisible par n ?

Réponses :

Nous avons constaté que ce sujet traite les règles de divisibilité, nous avons donc réalisé et expliqué toutes les règles de divisibilité des nombres de 1 à 20. D'abord, voici nos réponses aux trois questions principales :

Question 1

Pour prouver que cette règle fonctionne, nous avons voulu décomposer 252 (le nombre initial) pour faire apparaître le chiffre 3.

Pour diviser n'importe quel nombre

cdu = 100c + 10d + u

cdu = (99+1)xc + (9+1)xd +u

cdu = 99c+c + 9d+d + u

cdu = 3x33xc + c + 3x3xd + d + u

252 = 2x100 + 5x10 + 2x1

252 = 2(99+1) + 5(9+1) + 2x1

252 = 2x99 + 2x1 + 5x9 + 5x1 + 2x1

$252 = \underbrace{2x3x33}_{} + 2 + \underbrace{5x3x3}_{} + 5 + 2$

Divisible par 3

Donc si 2+5+2 (c+d+u) est divisible par 3 alors 252 (cdu) est divisible par 3

Question 2 :

Pour cette question, on a trouvé que l'on doit multiplier chaque chiffre par le reste de la division euclidienne du nombre qui correspond (1000 pour les chiffres des milliers…) par 7.

1 x 1 + 4 x 3 + 0 x 2 – 4 x 1 – 7 x 3 – 3 x 2 + 9 x 1 + 3 x 3 = 0

1÷7= 7 x 0 + 1

10÷7= 7 x 1 + 3

100÷7= 7 x 14 + 2

1 000÷7= 7 x 142 + 6

10 000÷7= 7 x 1428 + 4

100 000÷7= 7 x 14285 + 5

1 000 000÷7= 7 x 142857 + 1

$10\ 000\ 000 \div 7 = 7 \times 1428571 + 3$

$1\ 000 = 7 \times 142 + 6$

$1\ 000 = 7 \times 143 - 1$

$10\ 000 = 7 \times 1428 + 4$

$10\ 000 = 7 \times 1429 - 3$

$100\ 000 = 7 \times 14285 + 5$

$100\ 000 = 7 \times 14286 - 2$

Comme pour le 3, si le reste est divisible par 7, le nombre est divisible par 7.

Question 3

19 étant un nombre premier comme 7, nous avons essayé d’utiliser la même technique en cherchant les **restes.**

$1 \div 19 = 19 \times 0 + \mathbf{1}$

$10 \div 19 = 19 \times 0 + \mathbf{10}$

$100 \div 19 = 19 \times 5 + \mathbf{5}$

$1\ 000 \div 19 = 19 \times 52 + \mathbf{12}$

10 000 ÷ 19 = 19 x 526 + **6**
100 000 ÷ 19 = 19 x 5263 + **3**
1 000 000 ÷ 19 = 19 x 52631 + **11**
10^{7}÷ 19 = 19 x 526315 + **15**
10^{8}÷ 19 = 19 x 5262157 + **17**
10^{9}÷ 19 = 19 x … + **18**
10^{10}÷ 19 = 19 x … + **9**
10^{11}÷ 19 = 19 x … + **14**
10^{12}÷ 19 = 19 x … + **7**
10^{13}÷ 19 = 19 x … + **13**
10^{14}÷ 19 = 19 x … + **16**
10^{15}÷ 19 = 19 x … + **8**
10^{16}÷ 19 = 19 x … + **4**
10^{17}÷ 19 = 19 x … + **2**
10^{18}÷ 19 = 19 x … + **1**

Un nombre premier particulier, le 11 :

Comme pour le 3, nous avons cherché à faire apparaître le nombre 11 dans la décomposition de n'importe quel dividende.

$cdu = 100c + 10d + u$
$cdu = (11-1)^2c + (11-1)d + u$
$cdu = 11^2c - 11c - 11c + c + 11d - d + u$
$cdu = \underbrace{11(11c - c - c + d)}_{\text{divisible par 11}} + c - d + u$

Si le résultat de *+ c – d + u* est divisible par 11, le dividende est divisible par 11.

Pour les milliers et dizaines de milliers, cet enchaînement d’additions et de soustractions continue :

$$\begin{aligned}
&1000m\\
&= (11-1)^2 \times (11-1)m\\
&= (11-1)^2 \times (11m - m)\\
&= \underbrace{(11-1)^2 \times 11m}_{\text{Divisible par 11}} - (11-1)^2 m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(11^2 - 11 - 11 + 1)m\\
&= \underbrace{-11^2m + 11m + 11m}_{\text{Divisible par 11}} - m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&10\,000r\\
&= (11-1)^2 \times (11-1)^2\, r\\
&= (11-1)^2 \times (11^2 - 11 - 11 + 1)r\\
&= \underbrace{(11-1)^2 \times (11^2 - 11r - 11r}_{\text{Divisible par 11}} + r)
\end{aligned}$$

Voici les règles de divisibilité jusqu’à 20 suivies de quelques explications :

Les règles de divisibilité (1)

INFOS	**m**: mille; **c**: centaine; **d**: dizaine; **u**: unité
02	Si le chiffre des **u** est pair
03	Si la somme des chiffres est mutiple de 3
04	Si **du** est divisible par 4
05	Si le chiffre des **u** est 0 ou 5
06	Si le nombre est divisible par 2 et 3
07	Si le résultat est divisible par 7 (voir fiche 3)
08	Si **cdu** est divisible par 8
09	Si la somme des chiffres est mutliple de 9
10	Si le chiffre des **u** est 0
11	Si le résultat de -..+..-**m** +**c** -**d** +**u** est multiple de 11
12	Si le nombre est divisible par 4 et 3

	# Les règles de divisibilité (2)
13	Si le résultat est divisible par 13 (voir fiche 3)
14	Si le nombre est divisible par 7 et 2
15	Si le nombre est divisible par 5 et 3
16	Si **mcdu** est divisible par 16
17	Si le résultat est divisible par 17 (voir fiche 3)
18	Si le nombre est divisible par 9 et 2
19	Si le résultat est divisible par 19 (voir fiche 3)
20	Si le chiffre des **u** est 0 et si le chiffre des **d** est pair

Les règles de divisibilité (3)

INFOS	Pour le 7, 13, 17 et 19: Il faut multiplier chaque chiffre du nombre que l'on teste par les nombres donnés ci-dessous, en commencant par le chiffre des unités. Si le résultat est divisible par 7/13/17/19, le nombre est aussi divisible par 7/13/17/19.
7	1,3,2,-1,-3,-2 puis 1,3...de nouveau
13	1,-3,-4,-1,3,4 puis 1,-3... Table de 13: 13,26,39,52,65, 78,91,104,117,130,143,156
17	1,-7,-2,-3,4,6,-8,5,-1,7,2,3, -4,-6,8,-5 puis 1,-7... Table de 17: 17,34,51,68,85, 102,119,136,153,170
19	1,-9,5,-7,6,3,-8,-4,-2,-1,9, -5,7,-6,-3,8,4,2 puis 1,-9... Table de 19: 19,38,57,76,95, 114,133,152,171,190

Règle de divisibilité pour 3 :

$$\begin{aligned} cdu &= 100c + 10d + u \\ &= (99+1)c + (9+1)d + u \\ &= 99c + c + 9d + d + u \\ &= 3 \times 33c + c + 3 \times 3d + d + u \\ &= 3m + 3 \times 33c + 3 \times 3d \\ &= 3(m + 33c + 3d) \end{aligned}$$

$c + d + u = 3m$

Règle de divisibilité pour 4 :

$1 \div 4 \Rightarrow 4 \times 0 + 1$

$10 \div 4 \Rightarrow 4 \times 2 + 2$

$100 \div 4 \Rightarrow 25 \times 4$ $\longrightarrow$ pas de reste

Règle de divisibilité pour 7 :

$1 \div 7 \Rightarrow 7 \times 0 + 1$

$10 \div 7 \Rightarrow 7 \times 1 + 3$

$100 \div 7 \Rightarrow 7 \times 14 + 2$

$1000 \div 7 \Rightarrow 7 \times 142 + 6$ $\quad -1$

$10\,000 \div 7 \Rightarrow 7 \times 1\,428 + 4$ $\quad -3$

$100\,000 \div 7 \Rightarrow 7 \times 14\,285 + 5$ $\quad -2$

$1\,000\,000 \div 7 \Rightarrow 7 \times 142\,857 + 1$

$10\,000\,000 \div 7 \Rightarrow 7 \times 1\,428\,571 + 3$

$1000 = 7 \times 142 + 6$

$1000 = 7 \times 143 - 1$

ou

$10\,000 = 7 \times 1428 + 4$

$10\,000 = 7 \times 1429 - 3$

Règle de divisibilité pour 8 :

$1 \div 8 \Rightarrow 8 \times 0 + 1$
$10 \div 8 \Rightarrow 8 \times 1 + 2$
$100 \div 8 \Rightarrow 8 \times 12 + 4$
$1000 \div 8 \Rightarrow 8 \times 125$ → pas de reste

Règle de divisibilité pour 9 :

$c + d + u = 9m$

$$\begin{aligned} cdu &= 100c + 10d + u \\ &= (99+1)c + (9+1)d + u \\ &= 99c + c + 9d + d + u \\ &= 9m + 99c + 9d \\ &= 9(m + 11c + d) \end{aligned}$$

Règle de divisibilité pour 11 :

$$\begin{aligned} cdu &= 100c + 10d + u \\ &= (11-1)^2 c + (11-1)d + u \\ &= 11^2 c - 11c - 11c + c + 11d - d + u \\ &= \underbrace{11(11c - c - c + d)}_{\text{divisible par } 11} + c - d + u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1000m \\ &= (11-1)^2 \times (11-1)m \\ &= (11-1)^2 \times (11m - m) \\ &= \underbrace{(11-1)^2 \times 11m}_{\text{divisible par } 11} - (11-1)^2 m \\ &= -(11^2 - 11 - 11 + 1)m \\ &= \underbrace{-11^2 m + 11m + 11m}_{\text{divisible par } 11} - m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 10\,000\ell \\ &= (11-1)^2 \times (11-1)^2 \ell \\ &= (11-1)^2 \times (11^2 - 11 - 11 + 1)\ell \\ &= \underbrace{(11-1)^2 \times (11^2\ell - 11\ell - 11\ell}_{\text{divisible par } 11} + \ell) \end{aligned}$$

Règle de divisibilité pour 13 :

$1 \div 13 \Rightarrow 13 \times 0 + 1$

$10 \div 13 \Rightarrow 13 \times 0 + 10$ -3

$100 \div 13 \Rightarrow 13 \times 7 + 9$ -4

$1000 \div 13 \Rightarrow 13 \times 76 + 12$ -1

$10\,000 \div 13 \Rightarrow 13 \times 769 + 3$

$100\,000 \div 13 \Rightarrow 13 \times 7692 + 4$

$1\,000\,000 \div 13 \Rightarrow 13 \times 76923 + 1$

Règle de divisibilité pour 16 :

$1 \div 16 \Rightarrow 16 \times 0 + 1$

$10 \div 16 \Rightarrow 16 \times 0 + 10$

$100 \div 16 \Rightarrow 16 \times 6 + 4$

$1000 \div 16 \Rightarrow 16 \times 62 + 8$

$10\,000 \div 16 \Rightarrow 16 \times 625$ $\longrightarrow$ pas de reste

Règle de divisibilité pour 17 :

$1 \div 17 \Rightarrow 17 \times 0 + 1$

$10 \div 17 \Rightarrow 17 \times 0 + 10$ -7

$100 \div 17 \Rightarrow 17 \times 5 + 15$ -2

$1000 \div 17 \Rightarrow 17 \times 58 + 14$ -3

$10\,000 \div 17 \Rightarrow 17 \times 588 + 4$

$100\,000 \div 17 \Rightarrow 17 \times 5882 + 6$

$1\,000\,000 \div 17 \Rightarrow 17 \times 58823 + 9$ -8

$10^7 \div 17 \Rightarrow 17 \times 588235 + 5$

$10^8 \div 17 \Rightarrow 17 \times 5882352 + 16$ -1

$10^9 \div 17 \Rightarrow 17 \times 58823529 + 7$

$10^{10} \div 17 \Rightarrow 17 \times 588235294 + 2$

$10^{11} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 3$

$10^{12} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 13$ -4

$10^{13} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 11$ -6

$10^{14} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 8$

$10^{15} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 12$ -5

$10^{16} \div 17 \Rightarrow 17 \times \dots + 1$

Règle de divisibilité pour 19 :

$1 \div 19 \Rightarrow 19 \times 0 + 1$

$10 \div 19 \Rightarrow 19 \times 0 + 10$ -9

$100 \div 19 \Rightarrow 19 \times 5 + 5$

$1000 \div 19 \Rightarrow 19 \times 52 + 12$ -7

$10\,000 \div 19 \Rightarrow 19 \times 526 + 6$

$100\,000 \div 19 \Rightarrow 19 \times 5263 + 3$

$1\,000\,000 \div 19 \Rightarrow 19 \times 52631 + 11$ -8

$10^7 \div 19 \Rightarrow 19 \times 526315 + 15$ -4

$10^8 \div 19 \Rightarrow 19 \times 5263157 + 17$ -2

$10^9 \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 18$ -1

$10^{10} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 9$

$10^{11} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 14$ -5

$10^{12} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 7$

$10^{13} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 13$ -6

$10^{14} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 16$ -3

$10^{15} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 8$

$10^{16} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 4$

$10^{17} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 2$

$10^{18} \div 19 \Rightarrow 19 \times \dots + 1$