Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

La pile de crêpes

Élèves de 3ème :
OBIS Mathieu, RAOUL Rémy, POIGNANT Mathieu, HENRIO Victor, GHOBRIAL Antoine et MOSSER Raphaël.

Établissement
Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91402 Orsay Cedex.

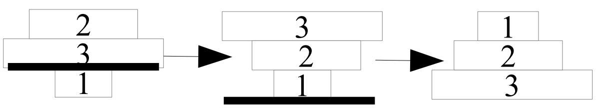
Enseignants :
FERRY Florence
ASSELAIN-MISSENARD Claudie.

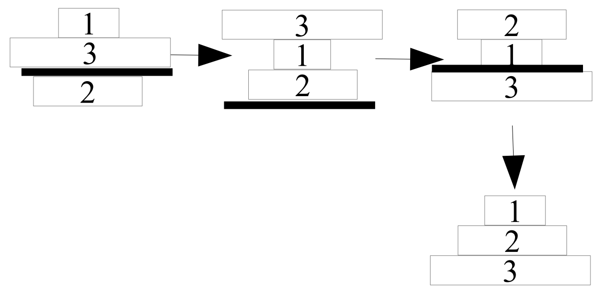
Chercheurs :
AGUILLON Nina et BOCHARD Pierre.

Le sujet :
Comment avec une simple palette, remettre dans l'ordre des crêpes d'une pile ? Au départ, les crêpes (de tailles toutes différentes) sont empilées n'importe comment. On veut les ranger par ordre décroissant, de la plus grande en bas à la plus petite en haut, en effectuant le moins de manipulations possible. La seule opération autorisée est d'insérer une palette entre deux crêpes et de retourner en bloc le haut de la pile. (1)

I – Exemples

Prenons une pile de 3 crêpes. La barre noire représentera notre palette.





Nous avons vite compris que notre problème revenait à trier des nombres. Comme représenter les crêpes de cette façon est long et laborieux, nous avons décidé de représenter les piles de crêpes par des tableaux de nombres. Le nombre se trouvant à l'intérieur de la case, représentera la grandeur de la crêpe. Dans la suite de l'article, on nommera n le nombre de crêpes à trier.

Voici un autre exemple pour $n = 4$:

2	1	3	2	4	1
4	4	2	3	3	2
1	2	4	4	2	3
3	3	1	1	1	4

Pour $n = 6$:

5	3	2	1
4	1	1	2
2	2	3	3
1	4	4	4
3	5	5	5
6	6	6	6

II - Notre méthode de résolution

Au début nous triions nos piles de crêpes au hasard sans vraiment avoir de méthode concrète ; puis nous avons trouvé un algorithme permettant de les trier sans réfléchir.
En voici les étapes :
1 - On place la palette sous la plus grande crêpe qui n'est pas à sa place.
2 – On retourne ce qui est au-dessus de la palette.
3 – Puis on place la palette à l'endroit où la crêpe doit aller et on retourne.
4 – On répète ces étapes jusqu'à retrouver la pile dans le bon ordre.

Application sur un exemple :

3	5	1	4	2	3	1
2	2	4	1	3	2	2
5	3	3	3	1	1	3
4	4	2	2	4	4	4
1	1	5	5	5	5	5

6	6	6	6	6	6	6

Le 6 est déjà placé donc on place la palette en dessous du 5, qui se retrouve en haut. Puis, le 5 doit aller au dessus du 6 donc on place la palette là. Ensuite, le 4 est mal placé donc on place la palette dessous et il se retrouve en haut. On place la palette au dessus du 5, où doit se trouver le 4 et on retourne. On continue ainsi jusqu'à obtenir la pile classée entièrement.

III - Le nombre de cas maximal

Nous nous sommes demandé en combien d'étapes maximales nous étions sûrs de trier une pile de crêpes.

Notre méthode peut ranger une crêpe en deux étapes maximum : on place la crêpe en haut de la pile puis on la met à sa place. Donc, pour un nombre de n crêpes, il était logique de penser que le nombre maximal d'étapes était $2n$.

Toutefois, nous avons observé que, arrivé au placement de la crêpe 2, il y avait deux configurations possibles :

Déjà rangées	Non rangées
1	2
2	1

La crêpe 2 se place en un seul mouvement maximum (dans le deuxième cas), on économise donc une étape, ce qui nous fait $2n$-1 étapes maximum. Ensuite, lorsque la 2 est placée, la crêpe 1 est déjà placée, on économise deux déplacements supplémentaires.

Le nombre d'étapes maximal pour trier n crêpes est donc : **$2n$-3.**

Vérifions sur nos exemples précédents :

- avec $n = 3$: $2\times3-3=3$; c'est bien en trois étapes maximum que nos piles ont été triées
- avec $n = 4$: $2\times4-3=5$; la pile a été triée en 5 étapes.
- Avec $n = 6$: $2\times6-3=9$; la pile a été triée en moins de 9 étapes, ce qui est le résultat attendu.

Avec notre méthode, le nombre d'étapes ne dépasse pas le $2n$-3.

Nous nous sommes ensuite demandé comment placer les crêpes au départ pour obtenir un tri avec un maximum d'étapes avec notre algorithme.

IV - La formation des piles les plus complexes

On appellera « pile la plus complexe », une pile qui demandera un nombre d'étapes maximum pour être rangée avec notre algorithme.

1) Pour un nombre de crêpes impair

Après de nombreux essais, certaines de ces piles de crêpes avaient la même configuration. Voici une technique permettant de former une pile des plus complexes :

- on place le 1 tout en haut et le 2 en bas
- on range les nombres impairs dans l'ordre décroissants en partant du haut et en descendant
- on range les nombres pairs dans l'ordre décroissants en partant du bas et en montant

Voici un exemple :

1
7
5
3
4
6
2

Trions cette pile avec notre algorithme :

1	7	2	6	1	5
7	1	6	2	5	1
5	5	4	4	3	3
3	3	3	3	4	4
4	4	5	5	2	2
6	6	1	1	6	6
2	2	7	7	7	7

2	4	1	3	2	1
4	2	3	1	1	2
3	3	2	2	3	3
1	1	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7

$2\times7-3=11$ Le tri s'est fait en 11 étapes.

Généralisation avec *n* crêpes, *n* impair :

1	n	2	n-1	1	n-2		2	1
n	1	n-1	2	n-2	1		1	2
n-2	n-2	n-3	n-3	n-4	n-4		3	3
n-4	n-4	,,,	,,,	,,,	,,,		4	4
...	...	6	6	3	3			
3	3	4	4	4	4	...		
4	4	3	3	6	6			
6	6	,,,	,,,	,,,	,,,		,,,	,,,
...	...	n-4	n-4	n-3	n-3		n-3	n-3
n-3	n-3	n-2	n-2	2	2		n-2	n-2
n-1	n-1	1	1	n-1	n-1		n-1	n-1
2	2	n	n	n	n		n	n

Cette pile est la plus longue à réarranger car elle nécessite 2 mouvements pour ranger chaque nombre autre que 1 et 2 (1 pour mettre le nombre en haut et 1 pour le mettre à sa place).

Il existe d'autres configurations de départ qui mènent également à un nombre d'étapes maximum. Voici un exemple que nous vous laissons trier :

6
1
7
2
4
3
5

2) Pour un nombre de crêpes pair

La technique que nous avions trouvé pour *n* impair ne fonctionne pas pour *n* pair. Nous sommes donc repartis dans nos recherches sur des exemples et voici ce que nous avons trouvé comme disposition :

- Les nombres impairs (sauf 1) rangés dans l'ordre décroissant en partant du haut
- les nombres pairs « alternés »
- 1 tout en bas

n = 6 9 étapes maximum	*n* = 8 13 étapes maximum	*n* = 10 17 étapes maximum	Généralisation avec *n* crêpes, *n* pair
5	7	9	n-1
3	5	7	n-3
4	3	5	,,,
2	6	3	3
6	2	8	n-2
1	4	4	n-6
	8	2	
	1	6	,,,
		10	
		1	n-4
			n
			1

Comme pour les nombres impairs de crêpes, il existe bien sûr d'autres configurations de crêpes les plus complexes que celle décrite ci-dessus.

V – Méthode la plus rapide ?

Posons-nous maintenant la question suivante : notre algorithme est-il toujours le plus rapide ? La réponse est : NON. Il existe de nombreux contre-exemples. En voici un :

5	1	4	3	2	1
3	2	2	1	1	2
4	4	1	2	3	3
2	3	3	4	4	4
1	5	5	5	5	5

Avec notre algorithme, on compte 5 étapes et avec une technique « indéfinie », seulement 4.

5	3	4	5	1
3	5	5	4	2
4	4	3	3	3
2	2	2	2	4
1	1	1	1	5

Nous avons essayé de faire des groupements de nombres afin de réduire le nombre d'étapes à « un » pour certaines crêpes mais nous n'avons pas réussi à automatiser notre tactique. (2)

Note de l'édition

(1) Il manque ici l'annonce des conjectures et résultats trouvés : les auteurs de l'article proposent un algorithme permettant de résoudre ce problème avec n'importe quel rangement initial, en étudiant les cas extrêmes.

(2) Il aurait été intéressant de préciser des cas où le nombre d'étapes pouvait être diminué.