Un tableau pas très bien attaché !

Année 2016 – 2017

Esteban Bordat, Dylan Boutillon, Thomas Brihaye, Nicolas Brun, Marie Bunlet, Thomas Candelier, Valentine Chaumet, Maxime Guerra, Jérémy Lespinasse, Kylian Reverte, Johann Roques, élèves de collège

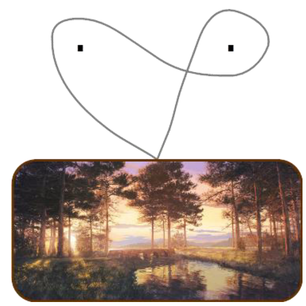
Encadrés par Guillaume Barrière, Ugo Deruette, Blanche Heisler, Jean-Pierre Vautrin.

Établissements : Collège Paul-Émile Victor (Branne), Collège Henri de Navarre (Coutras)

Chercheur : Rémi Boutonnet (Institut de Mathématiques de Bordeaux)

Présentation du sujet

Jean-François veut fixer un tableau au mur avec une ficelle et deux clous. Mais vu que Jean-François est plein de malice, il veut faire en sorte que si quelqu'un retire du mur n'importe lequel des clous, alors le tableau tombe. Comment doit-il enrouler la ficelle autour des clous ? Pourrait-il faire la même chose avec 3 clous ou plus ?



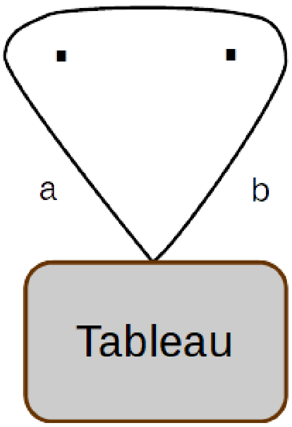
Premiers essais de Coutras, avec une ficelle et 2 aiguilles à tricoter :

En enroulant la ficelle un grand nombre de fois, le tableau tient et il tombe si on enlève un clou.

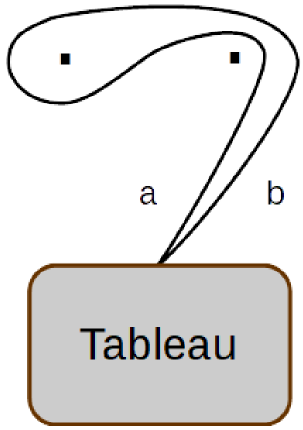
Notre chercheur nous a indiqué que ce n'était pas la bonne méthode et qu'il fallait imaginer que la ficelle glisse librement sans s'accrocher.

Essais sur Branne : avec un tableau, de la ficelle et des aimants :

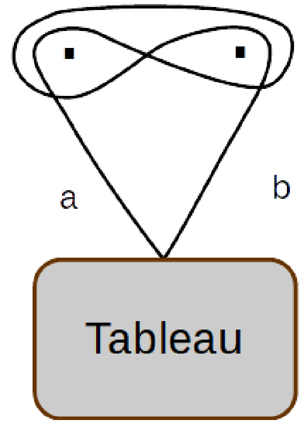
Voici la première technique trouvée en 3 étapes :



Tout d’abord on nomme les deux bouts de la ficelle « a » et « b ».



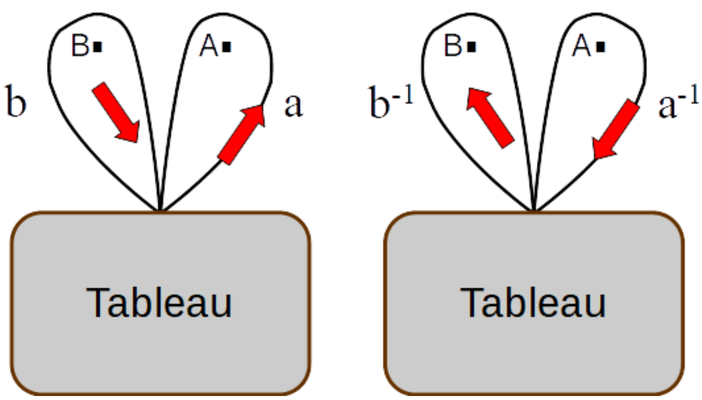
Ensuite on passe le bout de ficelle "a" par-dessus le clou de droite.



Pour finir on passe le bout "b" par-dessus le clou de gauche. Il faut faire attention à passer le bout "b" par-devant le bout "a" lors de la manipulation sinon un nœud sera formé quand un des clous sera enlevé !

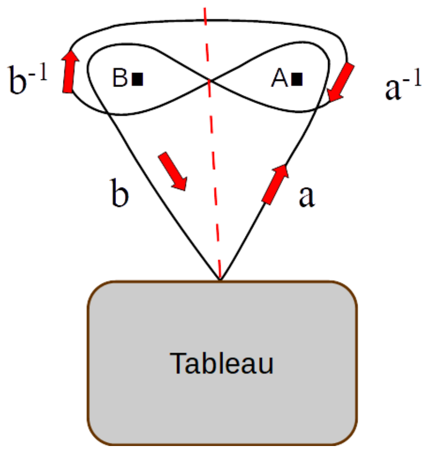
La magie des lettres

Ayant trouvé la première solution sans vraiment la comprendre, nous avons été bloqués pour la suite. Nous avons donc essayé d'expliquer notre raisonnement avec des lettres correspondant chacune à un mouvement autour d'un clou afin que ce soit plus clair :



Nous avons trouvé une logique consistant à annuler un tour noté "a" par un tour noté "a^{-1}" qui est son inverse et un tour noté "b" par un tour noté "b^{-1}". Les "a" et les "b" devant être alternés.
On part donc du principe qu'un tour qui part de la droite vers la gauche autour du clou est positif et que de la gauche vers la droite il est négatif.

Nous avons retranscrit notre première technique à l'aide de ces lettres :

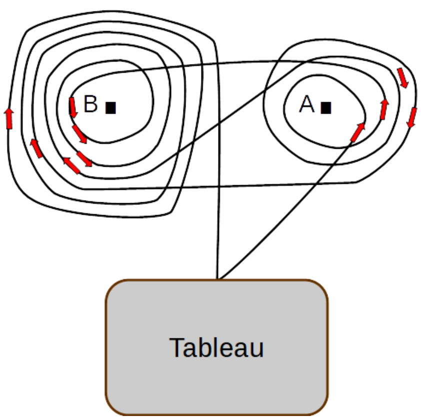


On voit que quand on enlève le clou de droite on enlève a et a^{-1}, b^{-1}annule b donc la ficelle tombe ! La formule pour notre première technique est donc :

$$\mathbf{a\,b^{-1}a^{-1}b}$$

Une infinité de solutions !

Il est possible de faire bien plus de tours en utilisant deux clous. Si on fait plusieurs a il faudra faire le même nombre de a^{-1} et pareil pour les b. Cependant, on n'est pas obligé de faire le même nombre de a que de b.



La formule pour cette solution est :

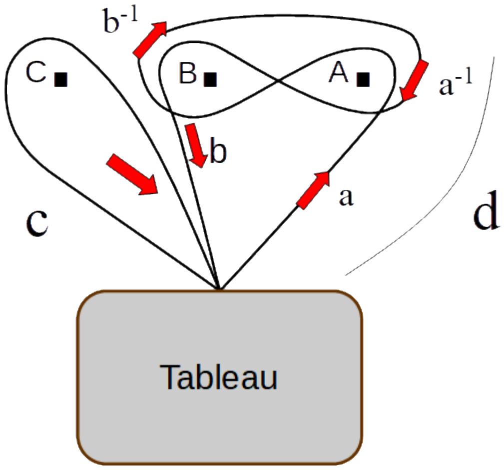
$$\mathbf{a\,a\,b\,b\,b\,a^{-1}\,a^{-1}\,b^{-1}\,b^{-1}\,b^{-1}}$$

On peut la raccourcir en l'écrivant de cette manière :

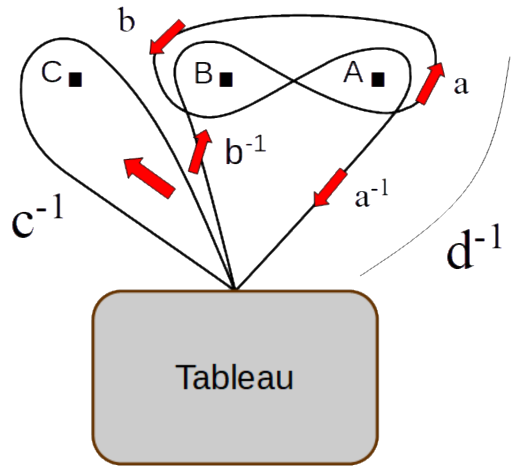
$$\mathbf{a^{2}b^{3}a^{-2}b^{-3}}$$

Trois clous ? Trois fois plus de plaisir !

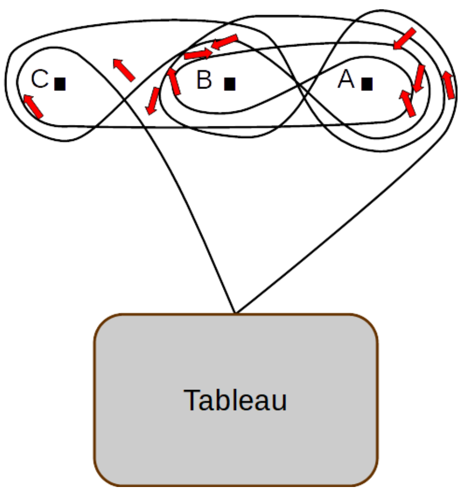
Nous avons ensuite tenté ce raisonnement avec trois clous en appelant "d" la formule **a b^{-1} a^{-1} b** pour des raisons pratiques d'écriture et en créant c et c^{-1} sur le modèle de a et a^{-1} et b et b^{-1}.



$ab^{-1}a^{-1}b = d$



$b^{-1}aba^{-1} = d^{-1}$



En utilisant le même modèle que la première formule :

a b^{-1} a^{-1} b,

on en fait une autre qui est :

c d c^{-1} d^{-1}

et qui est égale à :

c a b^{-1} a^{-1} b c^{-1} b^{-1} a b a^{-1}.

Une infinité de clous ?

$$\underbrace{cdc^{-1}d^{-1}}_{f} = cab^{-1}a^{-1}bc^{-1}b^{-1}aba^{-1}$$

On crée le clou e

$$\underbrace{efe^{-1}f^{-1}}_{h} = ecab^{-1}a^{-1}bc^{-1}b^{-1}aba^{-1}e^{-1}ab^{-1}a^{-1}bcb^{-1}aba^{-1}c^{-1}$$

On crée le clou g

$$\underbrace{ghg^{-1}h^{-1}}_{j}$$

On crée le clou i

$$\underbrace{iji^{-1}j^{-1}}_{l}$$

On crée le clou k

$$klk^{-1}l^{-1} \quad \ldots$$

Notes d'édition
Pour « aller plus loin » le lecteur et la lectrice intéressé·e pourront consulter cet article de blog
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2010/11/28/19713532.html