Courbes fermées ou infinies

Année 2017 - 2018

Élève de 4ème : Courilleau Kilpéric, Devillers Maxime, Duchard Axel, Fillion Tristan, Herrati Noam.
Rédacteur de l'article : Courilleau Kilpéric
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Raphaël Tinarrage.

Le sujet : On programme un robot pour effectuer les déplacements suivants

- avance d'une longueur 1 L en avant
- tourne d'un quart de tour à droite
- avance d'une longueur 2 L en avant
- tourne d'un quart de tour à droite
- avance d'une longueur 3 L en avant
- tourne d'un quart de tour à droite
- Recommence le programme au début.

Quelle courbe décrit le robot ? Étudier des courbes décrites par des déplacements plus compliqués.

Résultats : Avec le déplacement donné dans l'énoncé, le robot décrit une courbe particulière et nous avons démontré que cette courbe était fermée en un certain nombre d'étapes, même si on change la longueur des pas. Nous avons ensuite ajouté des pas : pour 4 pas nous avons démontré que les figures étaient infinies et pour un nombre de pas plus grand nous avons fait des conjectures : certaines courbes sont fermées d'autres sont infinies.

I – Étude du sujet

Tout d'abord, nous pouvons dire que L n'intervient pas dans la forme de la courbe décrite par le robot, c'est comme si L était une unité : en faisant varier L, on agrandit ou réduit la courbe.
Voici un premier tracé que l'on va nommer « courbe 1 – 2 – 3 / 90° » :

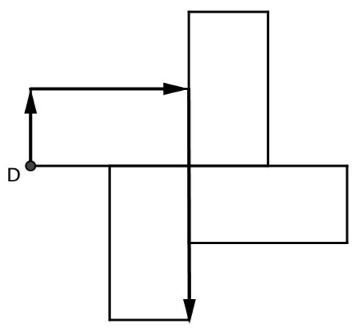
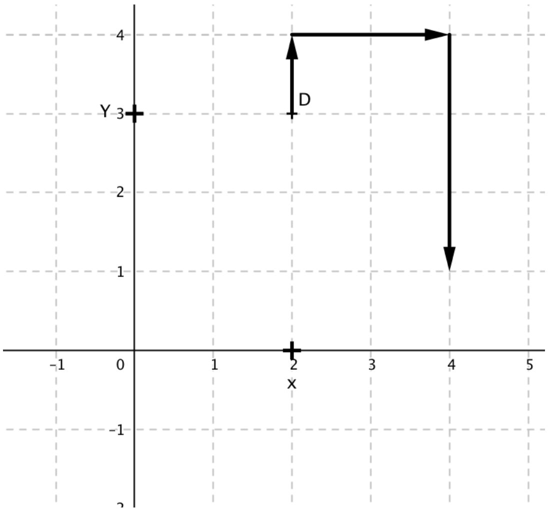


Figure 1

On remarque que la figure est fermée, le robot revient à son point de départ D après avoir fait 4 répétitions du programme de base. De plus, le robot, une fois revenu au point de départ, se trouve dans la même position qu'au début du programme ; en effet, il a tourné 3 fois de 90° pendant le programme de base et on a répété ce programme 4 fois pour produire la courbe de la figure 1.
On a donc : $90° \times 3 \times 4 = 1080° = 3 \times 360°$ Le robot fait donc 3 tours sur lui même.
Il nous faut démontrer que le robot revient bien au même endroit.

Au départ, le robot est assimilé à un point D de coordonnées (x ; y) dans un repère.
Il va effectuer le programme de base 1 – 2 – 3.



Point de départ : D (x ; y)

On avance de 1 vers le haut donc l'ordonnée augmente de 1 ; le point suivant est : (x ; y + 1)

On avance de 2 vers la droite donc l'abscisse augmente de 2 ; point suivant : (x + 2 ; y + 1)

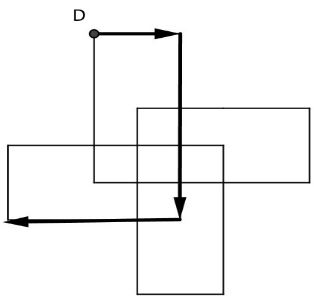
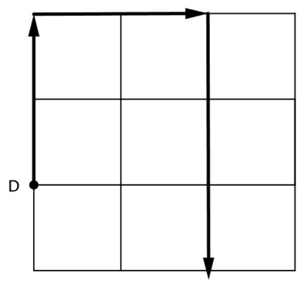
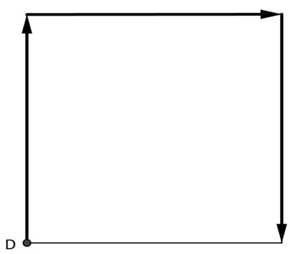
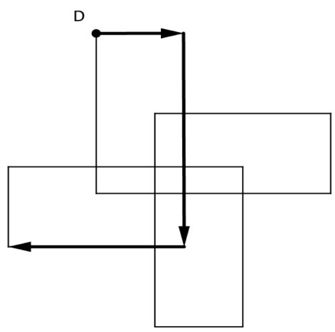
On continue ; voici les points obtenus successivement :

(x + 2 ; y – 2)
(x + 1 ; y – 2)
(x + 1 ; y)
(x + 4 ; y)
(x + 4 ; y – 1)
(x + 2 ; y – 1)
(x + 2 ; y + 2)
(x + 3 ; y + 2)
(x + 3 ; y)
(x ; y)

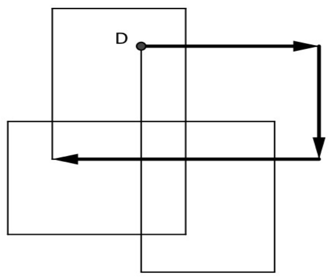
Le robot revient bien en D en 12 déplacements, ce qui nous donne les 4 répétitions du programme de base. Puisque le robot se trouve au point de départ et que le dernier mouvement passe de
(x + 3 ; y) à (x ; y) après une rotation d'un quart de tour, le robot se retrouve bien en position initiale. Il va donc effectuer indéfiniment cette courbe.

II – Changement de la longueur des pas

Nous avons ensuite pris d'autres exemples en changeant la longueur des pas du programme initial.
Au lieu de 1 – 2 – 3 on prend différents entiers a – b – c et on se demande si les courbes vont être identiques et surtout si elles vont être fermées.
Voici quelques exemples de tracés

Courbe 2 – 5 – 4 / 90° 	Courbe 2 – 2 – 3 / 90° 
Courbe 3 – 3 – 3 / 90° 	Courbe 3 – 8 – 6 / 90° 

Courbe 4 – 3 – 6 / 90°



Figures 2 à 6

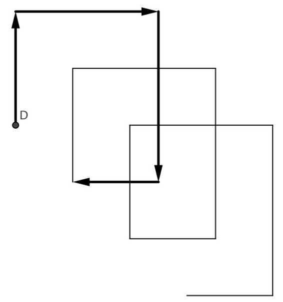
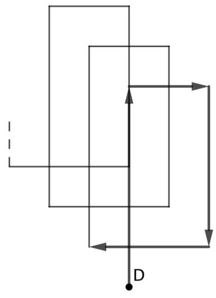
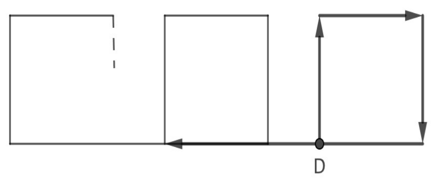
Nous obtenons des courbes fermées à chaque exemple : le robot semble revenir à son point de départ après avoir effectué 4 fois le programme de base. Il est de plus dans la même position qu'au départ, nous l'avons démontré au I. (1) Il va donc décrire à l'infini cette courbe.

La courbe est-elle toujours fermée ?

Nous allons démontrer que le robot revient à son point de départ de la même manière qu'au I.
Au départ, le robot est assimilé à un point D de coordonnées (x ; y) dans un repère. Il va effectuer le programme de base a – b – c. Voici les points obtenus successivement :
D (x ; y)
(x ; y + a)
(x + b ; y + a)
(x + b ; y + a – c)
(x + b – a ; y + a – c)
(x + b – a ; y + a – c + b)
(x + b – a + c ; y + a – c + b)
(x + b – a + c ; y + a – c + b – a)
(x + b – a + c – b ; y – c + b)
(x – a + c ; y – c + b + c)
(x – a + c + a ; y + b)
(x + c ; y + b – b)
(x + c – c ; y) ce point est le point de départ (x ; y). Le robot est donc bien revenu dans la même position, à son point de départ et il va décrire indéfiniment cette courbe.

III – On ajoute des pas

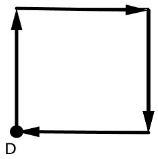
Regardons maintenant ce que devient la courbe si on rajoute des pas au programme de base.
1) 4 pas
Voici quelques exemples de courbes obtenues.

Courbe 4 – 5 – 6 – 3 / 90°	Courbe 5 – 2 – 4 – 3 / 90°	Courbe 2 – 2 – 2 – 5 / 90°
		

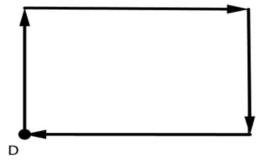
Figures 7 à 9

Voici 2 cas particuliers :

Courbe 2 – 2 – 2 – 2 / 90°



Courbe 2 – 3 – 2 – 3 / 90°



Figures 10 à 11

Proposition :
a) Nous avons deux cas particuliers :

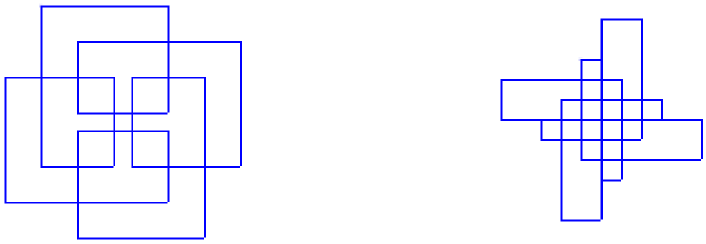
- si on prend une courbe avec 4 pas identiques a – a – a – a, la courbe est fermée dès les 4 premiers pas effectués ; on obtient un carré de côté a.
- si les pas sont de la forme a – b – a – b, la courbe est fermée et on obtient un rectangle.

b) Pour les autres cas, le robot ne revient jamais au point de départ ; la courbe est infinie. De plus, le motif de base formé par les 4 pas du programme de base se répète par translation. En effet, le motif se répète puisqu'au bout de 4 pas le robot a tourné de $4\times 90°$ donc de 360°, il se retrouve donc dans la même position.

Démonstration
Reprenons notre robot qui part d'un point quelconque. Il effectue les pas a – b – c – d.
(x ; y)
(x + a ; y)
(x + a ; y – b)
(x + a – c ; y – b)
(x + a – c ; y – b + d)
(x + a – c + a ; y – b + d)
(x + 2a – c ; y – b + d – b)
(x + 2a – c – c ; y – 2b + d)
(x + 2a – 2c ; y – 2b + 2d)
(x + 3a – 2c ; y – 2b + 2d)
(x + 3a – 2c ; y – 3b + 2d)
(x + 3a – 3c ; y – 3b + 2d)
(x + 3a – 3c ; y – 3b + 3d)
Pour revenir en (x ; y) il faudrait que a = c et b = d. Nous retrouvons ici les deux cas particuliers. Si a et c (ou b et d) sont différents, on ne retombera jamais sur le point de départ.

2) 5 pas ou plus
Nous avons construit au début nos figures avec Géogébra puis après, pour aller plus vite et obtenir plus d'exemples, nous avons élaboré un programme avec le logiciel Scratch où nous pouvions faire varier le nombre de pas ainsi que leur longueur.

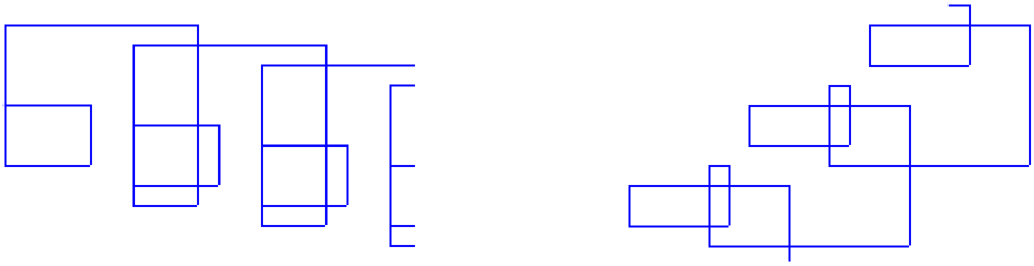
Voici des exemples obtenus avec Scratch :
5 pas : courbe 7 – 6 – 5 – 4 – 9 / 90° et 1 – 8 – 2 – 6 – 5 / 90°



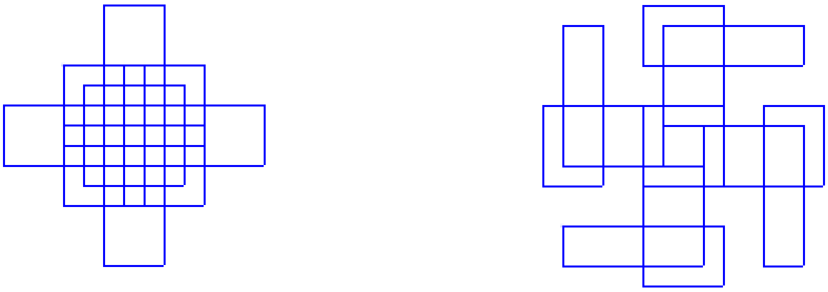
6 pas : courbe 2 – 2 – 2 – 7 – 6 – 4 / 90° et 9 – 6 – 4 – 8 – 2 – 5 / 90°

7 pas : courbe 4 – 9 – 5 – 6 – 6 – 7 – 4 / 90° et 10 – 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 1 / 90°

8 pas : courbe 4 – 3 – 4 – 7 – 9 – 9 – 3 – 4 / 90° et 1 – 3 – 5 – 2 – 8 – 7 – 10 – 4 / 90°



9 pas : courbe 4 – 5 – 7 – 3 – 9 – 4 – 3 – 6 – 4 / 90° et 8 – 3 – 4 – 9 – 1 – 3 – 5 – 7 – 2 / 90°



Pour un nombre de pas fixé, on a obtenu des résultats identiques : soit la courbe est fermée soit elle est infinie avec certains cas particuliers.

Tableau récapitulatif de nos résultats

On se place dans les cas non particuliers (les pas ne sont pas tous égaux et ne sont pas alternés) – ce sont des conjectures excepté pour 3 et 4 pas.

Nombre de pas	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Courbe fermée (F) ou infinie (I)	F	I	F	F	F	I	F	F	F	I	F	F
Nombre de répétitions avant fermeture	4		4	2	4		4	2	4		4	2

Nombre de pas	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Courbe fermée (F) ou infinie (I)	F	I	F	F	F	I	F	F	F	I	F	F
Nombre de répétitions avant fermeture	4		4	2	4		4	2	4		4	2

Dans le tableau, I signifie que les courbes sont infinies sauf pour les cas particuliers où elles seront fermées ; F signifie que toutes les courbes sont fermées.

Généralisation - conjecture

- Pour les nombres de pas qui sont multiples de 4, la courbe est infinie excepté dans 2 cas particuliers : lorsque tous les pas sont de longueur égale ou lorsqu'il y a deux nombres alternés.
- Pour un nombre pair de pas qui n'est pas multiple de 4, les courbes sont fermées en 2 répétitions de la suite de pas donnée au départ .
- Pour un nombre impair de pas les courbes sont fermées en 4 répétitions de la suite de pas donnée au départ.

Voici pour finir des exemples pour illustrer notre conjecture.
- Si le robot fait 31 pas : 31 est nombre impair donc notre courbe sera fermée en 4 répétitions.
- Si le robot fait 64 pas : 64 est nombre pair multiple de 4 donc notre courbe sera infinie sauf si les pas sont égaux ou alternés.
- Si le robot fait 40 pas : 40 est un nombre pair non multiple de 4 donc notre courbe sera fermée en 2 répétitions.

Remarque finale : nous pourrions aller plus loin dans le sujet en faisant varier cette fois l'angle dont tourne le robot. Nous avons commencé à chercher différents exemples avec un programme Scratch mais nous n'avons pas encore terminé nos recherches.

Note d'édition :
(1) L'éditeur constate que la démonstration n'est donnée que pour la séquence de départ et non dans le cas général qui est l'objet du paragraphe qui suit.