courbes à boucles

par Mlle Ségolène Fabre, M. Daniel Ferreira, M. Antoine Trystram, élèves de TS du **lycée Pablo Picasso de Fontenay sous bois (94)**, et — en début d'année — M. Nicolas Baillet, M. Mohammed Kaci, M. Fahd Ouled-Mabtoul, Mlle Linda Ounissi, élèves de TS du **lycée Romain Rolland d'Ivry (94)**

enseignants :
Mmes Monique Corlay, Claude Parreau
Mmes et M. Lise Bernigole, Jean-Paul Bernigole, et Christiane Guedj

chercheur :
M. Olivier Piltant

coordination article : Ferreira Daniel

compte-rendu de parrainage :

Le sujet avait pour but l'étude des courbes à boucles, courbes dites algébriques c'est-à-dire ayant pour équation un polynome de degré n. Une courbe a des boucles ou "point multiple" si celle-ci a un certain degré.

Impressions = exposé mené avec sérieux — recherche intéressante ainsi que les résultats — regrettons la longueur et parfois la complexité des résultats — en général nous restons sur une bonne impression. Merci.

NGa — Courbes à boucles : points multiples d'une courbe algébrique. 5

Une courbe *algébrique* peut être codée par une formule que doivent vérifier les coordonnées des points de cette courbe. Cette formule (appelée équation de la courbe) doit être *polynomiale* : seules sont permises les multiplications de coordonnées entre elles, les additions, et les multiplications par des nombres fixés à l'avance (les *coefficients*). Comment voir sur la formule s'il existe des points multiples, des croisements ? Peut-on avoir deux croisements sans faire intervenir de multiplication de plus de 3 coordonnées ?

courbes algébriques : introduction.

Parmi les courbes que l'on peut tracer dans le plan, il en est certaines qui sont appelées "algébriques". En voici des exemples :

• les droites, d'équation de la forme :

$$ax + by + c = 0.$$

• les coniques, c'est-à-dire les paraboles, les hyperboles, et les ellipses.

définitions

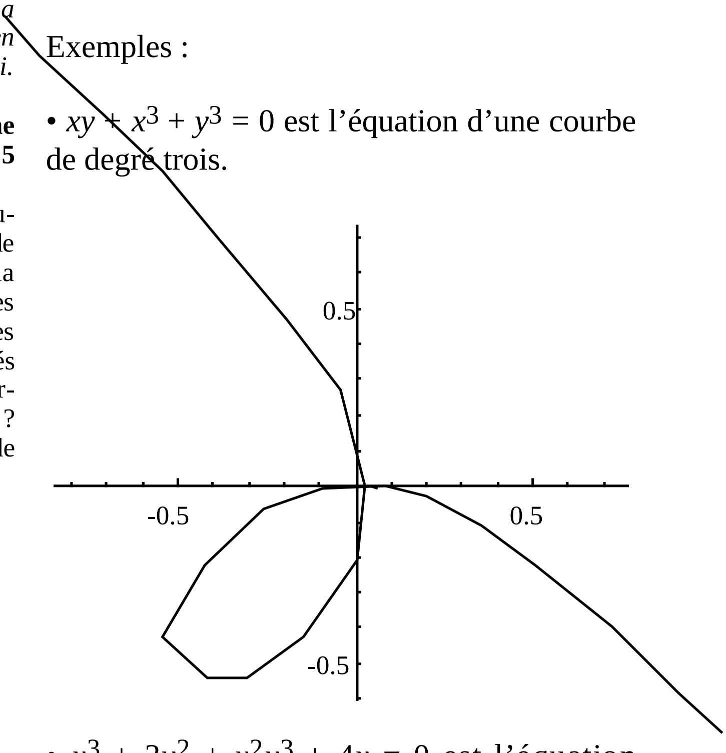
On appellera donc **courbes algébriques** des courbes dont les équations sont des polynômes, c'est-à-dire des sommes de puissances de x et de y affectées de coefficients constants, ainsi que de constantes seules.

degré d'une courbe algébrique

Le degré d'une courbe algébrique se détermine en considérant les plus grandes puissances de x et de y apparaissant dans l'équation de la courbe considérée.

Exemples :

• $xy + x^3 + y^3 = 0$ est l'équation d'une courbe de degré trois.



• $x^3 + 3y^2 + x^2y^3 + 4x = 0$ est l'équation d'une courbe de degré cinq car x^2y^3 est une puissance cinquième (3 + 2 = 5).

sujet

Certaines courbes algébriques font des “boucles”, d’autres non. Comment repérer sur l’équation si la courbe fait des boucles ou pas ? Quelles sont les équations les plus simples pour lesquelles on obtient des boucles ? Quel est le rapport entre le degré d’une courbe et le nombre de boucles qu’on peut espérer trouver ?

[NDLR : pour lire la suite avec profit, il vaut mieux savoir ce que sont : coordonnées polaires, discriminant du trinôme, polynômes, tangentes, trinôme du second degré, etc, etc ; c’est-à-dire connaître le programme de 1° S …]

Comment obtenir des courbes sur nos calculatrices à partir des équations algébriques ?

• les équations paramétriques

On peut assez facilement transformer des équations de degré trois en un système d’équations paramétriques, c’est-à-dire en un système de deux équations exprimant les coordonnées x et y des points de la courbe en fonction d’un “paramètre” t. (Cependant, il ne faut pas dans l’équation de puissances 1 ni de constantes seules). Il suffit, à partir d’une équation de degré trois du type :

$$ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + exy + fx^2 + gy^2 = 0$$

de poser:

$$y = tx$$
$$x = -\frac{e + ft^2 + gt}{a + bt^3 + ct + dt^2}$$

P.S.: Ceci est **une** méthode, et peut-être pas la plus simple ! De plus, elle est limitée au troisième degré, et avec des restrictions : avis aux amateurs …

• les équations polaires

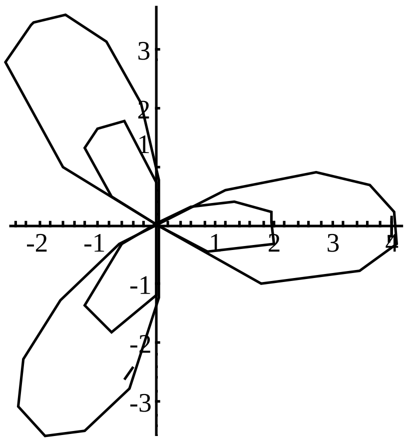
On peut par ailleurs utiliser des équations dites “polaires”, qui repèrent les points M de la courbe par une relation entre la distance r des points M à l’origine et l’angle θ entre le vecteur unitaire et le vecteur OM. On peut ainsi obtenir assez facilement, avec un peu d’imagination, des courbes qui font des boucles. Mais ces jolies courbes ne sont pas toutes algébriques, et il faut donc vérifier si elles le sont, c’est-à-dire si on peut transformer ces équations polaires en équations cartésiennes de forme polynômiale, en utilisant les formules :

$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Les boucles en zéro.

Le point multiple : définition.

Ces préliminaires posés, une question centrale se présente: comment définir une boucle ? En effet, le terme commun et “visuel”de boucle est ambigu … Définissons donc le **point multiple** : un point où la courbe admet plus d’une tangente. Ainsi, une courbe ayant plusieurs boucles se recoupant au même point n’aurait qu’un seul point multiple, qui peut être double, triple, quadruple … selon le nombre de tangentes.



“Repérage” des points doubles en zéro.

Considérons le point double en zéro comme un “double passage” de la courbe par l’origine. Sur les équations paramétriques précédemment trouvées, on remarque que x s’annule pour deux valeurs différentes de t car on a au numérateur un trinôme du second degré. (Or comme $y = tx$, si $x = 0$, $y = 0$.) Le discriminant de ce trinôme, quant à lui, dépend des coefficients de x^2, y^2, et xy dans l’équation prédéfinie. Tout porterait donc à croire que le point double dépend de ces termes.

Essayons de raisonner par une autre méthode: soit une équation polynomiale de degré supérieur ou égal à trois. Au voisinage de zéro, les termes ayant les plus grandes puissances seront négligeables à côté des termes de plus bas degré. Localement, dans ce voisinage, la courbe ressemble donc à la courbe dont l’équation ne contiendrait que les termes de plus bas degré, équation qui, résolue, nous donne l’équation des tangentes en zéro.

Exemple :

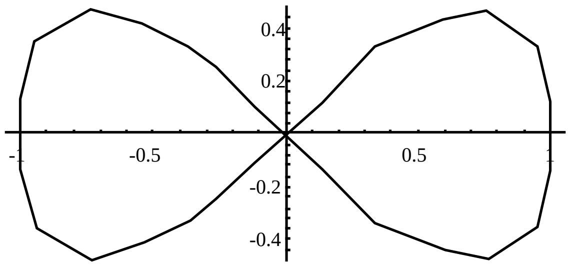
Soit la courbe d’équation $x^3 + y^3 + xy = 0$;

• si l’on calcule le discriminant défini, on le trouve positif.

• si l’on néglige en 0 les termes de plus haut degré devant les autres, il reste l’équation :

$$xy = 0,$$

dont les solutions sont $x = 0$ et $y = 0$. Lorsque l’on trace la courbe, on s’aperçoit que celle-ci admet en 0 deux tangentes, qui ne sont autres que … les droites d’équation $x = 0$ et $y = 0$!



Les deux méthodes conduisent donc à penser que les points doubles en zéro dépendent des termes de plus bas degré (second degré minimum pour avoir un point double). Les tangentes en zéro sont alors données par les solutions de l’équation réduite à ses termes de plus bas degré.

Rapport degré / boucles.

N.B.: Il existe des courbes dites “dégénérées” qui sont des exceptions aux démonstrations qui suivent. Le cas de ces courbes sera traité plus tard.

Le degré trois est le degré minimum pour avoir une boucle.

Il faut qu’une courbe soit au moins de degré trois pour présenter une boucle. En effet, si l’on prend une équation du second degré sans terme du premier degré ni termes constants (conditions nécessaires à une boucle en zéro), on obtient une équation du genre :

$$ax^2 + by^2 + cxy = 0.$$

Or les solutions de ce polynôme ne sont autres que deux droites sécantes en un point, c’est-à-dire une courbe dégénérée (seulement si $b^2 - 4ac$ est positif) .

En degré trois, on ne peut avoir qu’un seul point double.

Soit une courbe d’équation polynôme $f(x, y) = 0$ de degré n. Une droite du plan d’équation $ax + by + c = 0$ peut avoir avec cette courbe au plus n points d’intersection . En effet, si l’on recherche les points d’intersection entre cette droite et cette courbe, on obtient un système formé par les deux équations, qui, par substitution, peut être ramené à une équation polynôme à une seule variable x ou y de degré n. Cette équation a au plus n solutions, dont certaines peuvent être doubles, tout comme un trinôme du second degré peut avoir une racine double. Ces points seront les points doubles, que l’on comptera donc comme deux intersections.

Or prenons une courbe ayant deux points doubles : il existe une droite du plan, celle qui passe par les deux points doubles, (que l’on va donc compter comme deux points d’intersection chacun), qui a quatre points d’intersection avec cette courbe. Le degré minimum pour avoir deux points doubles est donc le degré quatre, et on ne peut avoir qu’un seul point double en degré trois.

Le cas des courbes dégénérées.

Les démonstrations faites ci-dessus admettent des exceptions, qui sont des courbes appelées “courbes dégénérées”. Ces courbes sont des courbes qui sont le produit de plusieurs équations d’autres courbes. Ainsi, si l’on prend le produit de l’équation d’un cercle (degré deux) et d’une droite (degré un) qui le coupe en deux points, on obtient deux points doubles en ces deux points (deux tangentes : la tangente au cercle et la droite elle-même). Or le produit des deux équations nous donnera une équation de degré trois et l’on aura ainsi une courbe de degré trois avec deux points doubles … De même le produit des équations de trois droites sécantes deux à deux nous donne une équation de degré trois qui est l’équation d’une courbe … à trois points doubles !

Pour aller plus loin …

Point triple / deux points doubles / trois points doubles

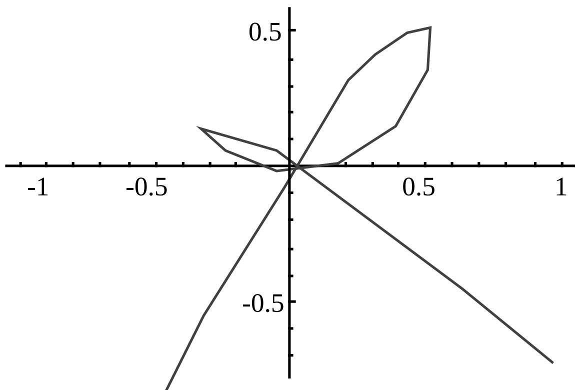
En reprenant la définition du point multiple, c'est à dire point à plusieurs tangentes, on peut construire des équations de courbes ayant en zéro un point triple. Ainsi, il nous suffit, en nous bornant sur ce que nous avons dit, à savoir que l'on peut négliger les termes de plus haut degré en zéro pour trouver les équations des tangentes, de construire une équation où les termes de plus bas degré nous donnent en zéro trois tangentes.

Exemple :

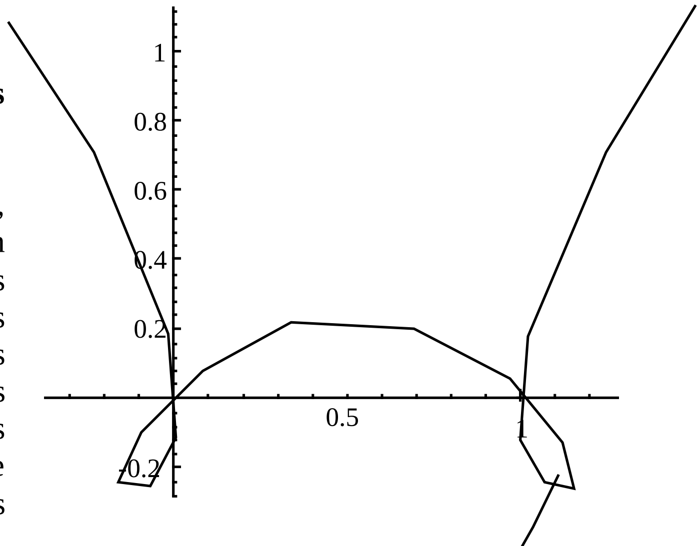
Soit l'équation $y^5 + x^4 + x^3y + xy(x - y) = 0$. Si l'on néglige les termes de plus haut degré en zéro, il nous reste l'équation :

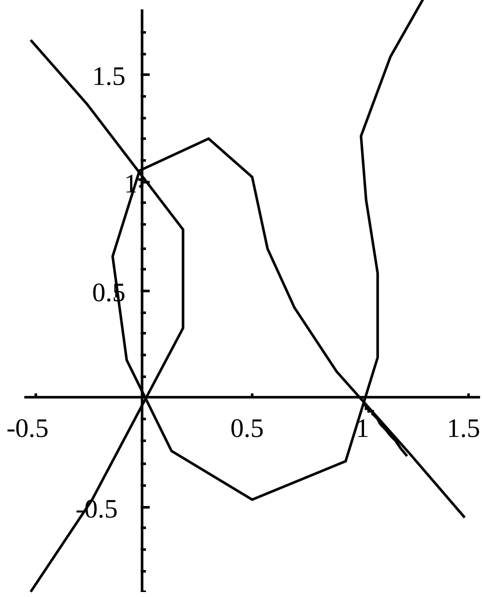
$$xy(x - y) = 0$$

dont les solutions sont les deux axes d'équations $x = 0$ et $y = 0$ et la première bissectrice d'équation $y = x$. On a donc bien trois tangentes.



En reprenant d'autre part la construction de points doubles en zéro, on peut, à partir d'une courbe ayant un point double, par un changement de repère (on change l'origine) lui "rajouter" des points doubles en d'autres points. On peut ainsi obtenir des courbes avec deux points doubles en degré quatre et avec trois points doubles en degré quatre aussi. (Voir exemples)





Annexe sur les intersections de courbes, par Antoine Trystram.

Dans l'article qui précède se pose la question du nombre de points d'intersection d'une droite et d'une courbe. En extension, nous avons essayé de trouver combien de points d'intersection peuvent avoir deux courbes de degrés respectifs n et p.

Conjecture : Si deux courbes ont des degrés n et p et qu'elles ont un nombre fini de points d'intersection, alors elles en ont au plus np.

Nous avons essayé de l'illustrer à partir de quelques exemples :

• Une courbe de degré d avec une droite :

$$x^8y^3 + x^2y^5 + \dots + x = 0 \quad \text{degré } 11$$
$$y = ax + b \quad \text{degré } 1$$

Pour trouver le nombre de solutions, on doit tout ramener à une seule variable, on remplace dans la première équation y par $ax + b$, ce qui donne :

$$x^8(ax + b)^3 + x^2(ax + b)^5 + \dots + x = 0$$

Il y a au plus 11 solutions, à cause de la factorisation qui en découlerait : au mieux, l'équation se mettra sous la forme :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{11}) = 0$$

Il existe donc au plus 11 points d'intersection entre la droite et la courbe ; la conjecture est vérifiée.

• On remplace la droite par une courbe de degré p :

$$Q(x, y) = 0 \quad \text{degré } n$$
$$y = P(x) \quad \text{degré } p$$

ex :

$$x^8y^3 + x^2y^5 + \dots + y^{11} = 0 \quad \text{degré } 11$$
$$y = x^3 - 2x^2 \quad \text{degré } 3$$

Si on remplace y par son expression, on trouve :

$$x^8(x^3-2x^2)^3 + x^2(x^3-2x^2)^5 + \dots + (x^3-2x^2)^{11} = 0$$

degré 17 degré 17 degré 33

Il y a donc au plus 33 points d'intersections entre la courbe d'équation $P(x) = 0$ et la courbe d'équation $Q(x, y) = 0$; la conjecture est vérifiée.

• On remplace la droite par $y = P(x) / Q(x)$ où $Q(x)$ est de degré 1 :

$f(x, y) = 0$
$y = P(x) / Q(x)$

ex :

$$x^3 - y^3 + 3xy^2 + x = 0 \quad \text{degré } 3$$
$$3x^4 - y + xy = 0 \quad \text{degré } 4$$

Il vient :

$$x^3 - y^3 + 3xy^2 + x = 0$$
$$y = 3x^4 / (1 - x)$$

On remplace y par $3x^4 / (1 - x)$, il vient :

$$x^3 - (3x^4 / (1-x))^3 + 3x(3x^4 / (1-x))^2 + x = 0$$

puis:

$$[x^3(1-x)^3 - 27x^{12} + 27x^9(1-x) + x(1-x)^3] / (1-x)^3 = 0$$

Le degré maximum du numérateur est 12, il y a au plus 12 points d'intersection, la conjecture est vérifiée.

• Nous n'avons pas pu développer la forme :

$f(x, y) = 0$
$y^n = P(x) / Q(x)$

Nous pouvons donc affirmer que la conjecture de départ est vraie pour les quelques cas étudiés précédemment, mais nous ne savons pas si la conjecture est vraie en général.

Historique, par Mme Claude Parreau.

Dans un premier temps les élèves ont essayé d'obtenir les courbes sur leur calculatrice, les plus belles possibles, avec tout plein de boucles …

Ensuite deux questions se sont évidemment posées :

— comment obtenir les cubiques ? (en paramétrant)

— quelles courbes sont bien algébriques (par exemple $r = \sin 7\theta$, etc …)

[Le niveau décourage vite les élèves de seconde, et correspond plutôt au programme de terminale.]

Au premier séminaire, les questions qui se posent sont :

— qu'est-ce qu'une boucle ? [boucle = « on passe deux fois par le même point ? » (idée du paramétrage), « il y a deux tangentes au moins »]

— comment a-t-on une tangente ? [tangente : « vecteur dérivé » (donc toujours l'idée de paramétrage), pour les élèves d'un lycée, ou « obtenue en négligeant au voisinage de 0 les termes de plus haut degré », pour ceux de l'autre lycée.]

Ensuite un seul lycée va continuer (ce qui est dommage !), avec comme principes : boucle = point multiple = point avec plusieurs tangentes, l'équation des tangentes en O, origine du repère, étant effectivement obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur dans l'équation de la courbe.

On rentre alors plus dans le sujet : trouver les degrés les plus petits possibles, le plus de points multiples possibles. On construira donc des équations pour obtenir les points multiples voulus, et on vérifiera (avec le logiciel de calcul formel : `Derive`).

Finalement, une courbe de degré 4 avec 3 points doubles a été obtenue. D'après Olivier Piltant, cela veut dire qu'elle est *de genre 0 donc paramétrable par des fonctions rationnelles* ; ce paramétrage — donné ci-dessous — n'est pas *facile-facile* à trouver explicitement … merci donc à Olivier Piltant pour le calcul !

paramétrage de

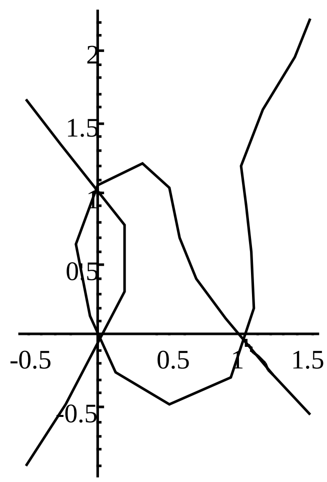
$4\,x^2\,(x-1)^2 - y^2(t-1)^2 + 2\,x^2y(x-1) = 0$

$$x = \frac{u+2}{u^2 - tu + 2}$$
$$y = \frac{u\,(u+2)}{u^2 - tu + 2}$$

avec

$$u = \frac{2\,t\,(t+2) + 2\,(t+A)}{t\,(t+4) + 2}$$

[NDLR : contrôle qualité des écrits …



La courbe ressemble bien à la précédente ; le paramétrage passe le test qualité.]