La constante de Darchicourt

Année 2017-2018

Elève : **CODRON Alexis, élève de Terminale S**

Établissement : Lycée Fernand Darchicourt - Hénin Beaumont (62)

Enseignante : **Mme WEEXSTEEN**

Chercheur : **M. SARALEGI-ARANGUREN** (LML – EA 2462 Faculté des Sciences Jean Perrin- Université D'Artois)

I- Présentation de la suite

La suite de Conway (aussi appelée Look and say sequence) est une suite de nombres proposée par le mathématicien John Horton Conway en 1986. Il a défini cette suite ainsi : le premier terme est le chiffre 1 puis chaque terme est obtenu par lecture des chiffres contenus dans le terme précédent.

Les premiers termes :

→ Le premier terme est 1.

→ Pour construire le deuxième terme de la suite, il faut annoncer les chiffres que l'on voit dans le premier terme. Nous voyons une seule fois le chiffre 1 : nous lisons donc un « 1 ». Le deuxième terme de la suite sera 11. Nous pouvons représenter de la façon suivante le début de la suite :

1

11

De la même façon, le deuxième terme de la suite est composé de deux fois le chiffre 1, nous lisons donc deux « un », le troisième terme de la suite sera 21 :

1

11

21

→ Ce troisième terme 21 est composé d'un chiffre 2 et d'un chiffre 1 : nous lisons un « deux » puis un « un ». Le quatrième terme de la suite sera donc 1211. Etc..

On obtient ainsi les premiers termes de la suite qui est généralement représentée sous la forme d'une pyramide dont chaque étage est un terme de la suite :

1

11

21

1211

111221

312211 …

Pour construire cette suite, J.Conway a utilisé la numération décimale pour compter le nombre de chiffres identiques : ce qui veut dire qu'il a écrit les nombres en base 10. Dans cette base, 10 symboles sont utilisés pour compter : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. C'est le système de numération le plus couramment utilisé dans la vie quotidienne. Mais rien ne nous empêche d'utiliser un autre système de numération pour construire cette suite, en utilisant plus ou moins de symboles pour compter. Nous avons choisi de réécrire cette suite en base 2. Cette base est généralement utilisée en informatique. On représente les nombres à l'aide de deux symboles 0 et 1. On dit qu'on écrit les nombres en binaire.

II- Une parenthèse sur le binaire

Compter en binaire suit rigoureusement le même principe que compter en base 10.

En base 10, nous ne disposons pas de symbole pour écrire le nombre dix. Pour aller au-delà de 9, nous devons utiliser plusieurs symboles : il faut changer de rang. Le rang des unités est « plein », il revient alors à 0 et nous commençons le rang des dizaines, nous le mettons à 1. Le nombre dix se représente de la façon suivante « 10 ». Et ainsi de suite…

En binaire, nous ne disposons que des chiffres 0 et 1. Par conséquent, nous ne disposons pas de symbole pour écrire le nombre deux. Nous devons effectuer un changement de rang : le premier rang est « plein », nous passons alors au rang suivant. Nous mettons le premier rang à 0 et le deuxième à 1. Deux en binaire s'écrit « 10 ».

<u>Quelques nombres en binaire :</u>

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110

III- Suite look and say en binaire

Nous allons réécrire notre suite de nombres en binaire. Les règles sont les mêmes mais cette fois on compte en base 2.

<u>Premiers termes de la suite en base 2 :</u>

1 (Nous partons toujours du nombre 1.)

11 (Ici aucun changement.)

101 (Deux en binaire s'écrit 10.)

111011

11110101 (Trois en binaire s'écrit 11.)

100110111011

…

IV- Problème posé

Nous nous intéressons maintenant à la longueur des termes de cette suite (soit au nombre de chiffres présents dans chaque terme de la suite). On veut quantifier le taux de hausse de la longueur d'un terme par rapport à la longueur du terme qui le précède.

Calculons la longueur des premiers termes de la suite :

1 terme de longueur 1

Longueur multipliée par 2 : hausse de 100%.

11 terme de longueur 2

Longueur multipliée par 1,5 : hausse de 50%.

101 terme de longueur 3

Longueur multipliée par 2 : hausse de 100%.

111011 terme de longueur 6

Longueur multipliée par $\frac{4}{3}$: hausse de ≈ 33%.

11110101 terme de longueur 8

Longueur multipliée par 1,5 : hausse de 50%.

100110111011 terme de longueur 12

Longueur multipliée par 1,5 : hausse de 50%.

111001011011110101 terme de longueur 18

Notons (A_n) la suite des longueurs des termes de la suite, n étant le numéro de l'étage de la pyramide, on a alors :

- $A_1 = 1$
- $A_2 = 2$
- Etc..

La question qui m'a été posée par M.Saralegi est la suivante :

Quelle est la limite de la suite des rapports $\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ quand n tend vers plus l'infini ?

V- Conjectures

- <u>A la main :</u> nous pouvons calculer les premières valeurs des termes de la suite (A_n) puis les rapports de deux termes consécutifs. Les résultats sont consignés ci-dessous :

n	A_n	$\frac{A_{n+1}}{A_n}$
1	1	2.000000
2	2	1.500000
3	3	2.000000
4	6	1.333333
5	8	1.500000
6	12	1.500000
7	18	1.500000
8	27	1.444444
9	39	1.487194
10	58	1.465517
11	85	1.470588

On peut déjà conjecturer que la suite $\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ converge vers un réel λ proche de 1,5.

- Avec un algorithme :

Je vais vous expliquer comment j'ai programmé la suite de Conway. Il a fallu retranscrire à l'ordinateur la méthode pour obtenir le terme de rang $n+1$ de la suite à partir du terme de rang n. Pour cela, j'ai appris et utilisé le langage Python.
Nous allons travailler avec des listes. Chaque terme de la suite de Conway sera représenté par une liste de chiffres.

Dans le programme que je vous propose : Suite1 est une liste de chiffres qui contient le terme de rang n et Suite2 est une deuxième liste de chiffres qui contiendra le terme de rang $n+1$: l'algorithme créera Suite2 à partir de Suite1. Au départ, Suite1 contient le premier terme de la suite représenté par la liste [1] et Suite2 est une liste vide [].

- La première étape pour construire la suite consiste à lire une suite de chiffres puis à compter combien de chiffres similaires se succèdent. Nous avons programmé ceci de la manière suivante :

```
for i in range(0,len(Suite1)-1):
    if Suite1[i] == Suite1[i+1]:
        Compteur = Compteur + 1
```

  La variable Compteur permet de compter combien de chiffres similaires se succèdent. On ajoute 1 dans Compteur tant que la valeur suivante est égale à la précédente.

- Si l'algorithme rencontre un chiffre différent. La variable Compteur n'est plus incrémentée.
  On va donc stocker dans Suite2 la quantité de chiffres similaires s'étant succédés.
  L'algorithme ajoute alors deux termes dans la liste Suite2 : la valeur stockée dans la variable Compteur suivie de la valeur du chiffre dont on a compté le nombre de répétitions. Avant cela, il faut convertir le nombre stocké dans la variable Compteur en binaire. La fonction binaire (voir ci-dessous) permet de le faire.

```
for i in range(0,len(Suite1)-1):
    if Suite1[i] == Suite1[i+1]:
        Compteur = Compteur + 1
    elif Suite1[i] != Suite1[i+1]:
        binaire(Compteur,Suite2)
        Suite2.append(Suite1[i])
        Compteur = 1
```

```
def binaire (nombre,Suite2):
    if nombre == 1:
        Suite2.append(1)
    elif nombre == 2:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(0)
    elif nombre == 3:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(1)
    elif nombre == 4:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(0)
        Suite2.append(0)
    return(Suite2)
```

  Avant de passer au comptage du chiffre suivant, la valeur de la variable Compteur doit être réinitialisée à 1.

- Arrivé à la fin de Suite1, l'algorithme compare le dernier chiffre avec un chiffre qui devrait le suivre or ce chiffre n'existe pas. Pour éviter que le programme ne signale une erreur, nous devons modifier l'algorithme. L'astuce est d'ajouter à la fin de la liste Suite1 un chiffre dont nous sommes sûrs qu'il n'apparaîtra pas. Comme notre suite est en binaire, prenons par exemple le chiffre 2. Nous ajoutons cette valeur à la liste grâce à la commande append.

```
Suite1.append(2)
for i in range(0,len(Suite1)-1):
    if Suite1[i] == Suite1[i+1]:
        Compteur = Compteur + 1
    elif Suite1[i] != Suite1[i+1]:
        binaire(Compteur,Suite2)
        Suite2.append(Suite1[i])
        Compteur = 1
Suite1.pop()
```

  Le chiffre 2 est alors ajouté à la fin de la variable Suite1 avant qu'elle soit lue par l'algorithme. Nous devons aussi modifier l'algorithme pour qu'il ne lise pas la dernière valeur de Suite1. Cela se traduit dans l'algorithme par « Pour i variant de 0 à len(Suite1)-1 ».

A la fin de l'exécution de la boucle, nous devons retirer le chiffre que nous avions ajouté, cela est possible grâce à la fonction pop.

L'utilisation d'une nouvelle boucle POUR nous permet de répéter ces actions pour obtenir la longueur d'un terme de la suite de rang n où n est un entier fixé par l'utilisateur (cet entier est stocké dans la variable SuiteN ci-dessous). Voici l'algorithme final :

```
def rapportlongueur(SuiteN):
    Suite1 = [1]
    Suite2 = []
    Compteur = 1

    for e in range (1,int(SuiteN)+1):
        Suite0 = Suite1
        Suite1.append(2)
        for i in range(0,len(Suite1)-1):
            if Suite1[i] == Suite1[i+1]:
                Compteur = Compteur + 1
            elif Suite1[i] != Suite1[i+1]:
                binaire(Compteur,Suite2)
                Suite2.append(Suite1[i])
                Compteur = 1
        Suite1.pop()

        Suite1 = Suite2
        Suite2 = []

    print ("N+1/N:")
    print (len(Suite1)/len(Suite0))
    print (len(Suite1))
    print (len(Suite0))
```

```
def binaire (nombre,Suite2):
    if nombre == 1:
        Suite2.append(1)
    elif nombre == 2:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(0)
    elif nombre == 3:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(1)
    elif nombre == 4:
        Suite2.append(1)
        Suite2.append(0)
        Suite2.append(0)
    return(Suite2)
```

Grâce à l'algorithme nous pouvons améliorer notre conjecture :

n	A_n	$\frac{A_{n+1}}{A_n}$
1	1	2.000000
2	2	1.500000
3	3	2.000000
4	6	1.333333
5	8	1.500000
6	12	1.500000
7	18	1.500000
8	27	1.444444
9	39	1.487194
10	58	1.465517
11	85	1.470588
12	125	1.464000
13	183	1.469945
14	269	1.464684
15	394	1.467005

…

45	37 706 407	1.46557124
46	55 261 426	1.46557122

Il semble que la suite $\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ converge vers un réel λ proche de 1,4655712.

(On prouvera ensuite que cette limite conjecturée est bien la valeur approchée à 10^{-7} de la limite exacte.)

VI- Résolution algébrique du problème

1- Les « blocs »

1
11
101
111011
100110101

Observons cette suite. A partir de la 3ème ligne se crée un 0 suivi d'un 1 et nous pouvons remarquer que ce motif se reproduit à chaque ligne, nous pouvons nous demander si ce motif vient à disparaitre ou si le motif se reproduit sur chaque terme successif.

Isolons le 0 et le 1 de la troisième ligne :

01
1011
1110101
…

Pour construire notre suite nous comptons d'abord une quantité de chiffres que l'on note en binaire puis nous notons la valeur de ce chiffre. Or, chaque nombre que nous écrivons en binaire commence toujours par un chiffre 1.

Pour un rang n :

$$1(x \dots x)01(x \dots x)$$

Pour passer au rang $n+1$, nous allons écrire la quantité de 0 suivie du chiffre 0 :

$$\underbrace{1(x \dots x)}_{Quantité\ de\ 0}0$$

A droite du 0, nous continuons la suite mais nous savons que le premier chiffre d'un nombre en binaire est forcément un 1.

Nous pouvons en conclure que lorsqu'il se forme la succession d'un 0 suivi d'un 1 alors ce motif reste sur chaque ligne qui suit.

Cela a pour conséquence de faire évoluer de façon indépendante la suite à droite du 0.

Nous pouvons alors identifier dans la suite 10 blocs élémentaires qui permettent de construire la suite :

1

11

101

111011

11110101

100110111011

1110010110111101101

1111001111010110100110111011

100110011110111010110111001011011110101

A la neuvième ligne, les 10 blocs constituant notre suite sont apparus.

Nous pouvons écrire une relation qui donnera le(les) bloc(s) qui le suivra(ont) chacun des dix blocs de la suite :

1 → 11

11 → 10 ; 1

10 → 1110

1110 → 11110

11110 → 100 ; 110

110 → 10 ; 110

100 → 11100

11100 → 111100

111100 → 100 ; 1100

1100 → 10 ; 1100

Chaque bloc de la suite de Conway en binaire donnera à l'étape suivante un ou deux des dix blocs connus, c'est une information très importante pour l'étude de la suite car cela signifie que chaque terme de la suite n'est composé que d'une succession de blocs parmi les dix blocs connus (par exemple, le 46ème terme de la suite de Conway en binaire, de longueur 55 261 426, s'écrit en utilisant uniquement ces blocs !). Etudier la longueur des termes de la suite de Conway en binaire revient à étudier la longueur des termes engendrés par chaque bloc.

Nous pouvons créer pour chaque bloc une suite dont chaque terme est égal à la longueur des termes qui découlent de ce bloc à une étape donnée. (On entend toujours par longueur, le nombre de chiffres.) :

Pour tout n entier naturel :

Pour le bloc 1, on note A_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $A_0 = 1$.

Pour le bloc 11, on note B_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $B_0 = 2$.

Pour le bloc 10, on note C_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $C_0 = 2$.

Pour le bloc 1110, on note D_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $D_0 = 4$.

Pour le bloc 11110, on note E_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $E_0 = 5$.

Pour le bloc 110, on note F_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $F_0 = 3$.

Pour le bloc 100, on note G_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $G_0 = 3$.

Pour le bloc 11100, on note H_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $H_0 = 5$.

Pour le bloc 111100, on note I_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $I_0 = 6$.

Pour le bloc 1100, on note J_n la longueur de ce bloc à un rang n avec $J_0 = 4$.

2- Mise en équations

Grâce aux relations et aux notations données à la page précédente, nous déduisons alors les équations suivantes :

Pour tout n entier naturel :

$$A_{n+1} = B_n$$
$$B_{n+1} = C_n + A_n$$
$$C_{n+1} = D_n$$
$$D_{n+1} = E_n$$
$$E_{n+1} = G_n + F_n$$
$$F_{n+1} = C_n + F_n$$
$$G_{n+1} = H_n$$
$$H_{n+1} = I_n$$
$$I_{n+1} = G_n + J_n$$
$$J_{n+1} = C_n + J_n$$

Nous pouvons diminuer le nombre d'équations car certaines sont liées :

J_{n+1} peut par exemple s'écrire en fonction de I_{n+1}, E_{n+1} et F_{n+1} :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - E_{n+1} + F_{n+1} &= G_n + J_n - G_n - F_n + C_n + F_n \\ &= C_n + J_n \\ &= J_{n+1} \qquad \text{donc } J_n = I_n - E_n + F_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nous ne conservons alors que les neuf équations suivantes :

$$A_{n+1} = B_n$$
$$B_{n+1} = C_n + A_n$$
$$C_{n+1} = D_n$$
$$D_{n+1} = E_n$$
$$E_{n+1} = G_n + F_n$$
$$F_{n+1} = C_n + F_n$$
$$G_{n+1} = H_n$$
$$H_{n+1} = I_n$$
$$I_{n+1} = G_n + I_n - E_n + F_n$$

De la même façon, nous pouvons encore simplifier ce système d'équations :

I_{n+1} peut par exemple s'écrire en fonction de H_{n+1}, E_{n+1} et de D_{n+1} :

$$\begin{aligned} H_{n+1} + E_{n+1} - D_{n+1} &= G_n + I_n - E_n + F_n \\ &= I_{n+1} \qquad \text{donc } I_n = H_n + E_n - D_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Il nous reste alors les huit équations suivantes :

$$A_{n+1} = B_n$$

$$B_{n+1} = C_n + A_n$$

$$C_{n+1} = D_n$$

$$D_{n+1} = E_n$$

$$E_{n+1} = G_n + F_n$$

$$F_{n+1} = C_n + F_n$$

$$G_{n+1} = H_n$$

$$H_{n+1} = H_n + E_n - D_n$$

De la même façon, nous pouvons encore simplifier ce système d'équations :

H_{n+1} peut par exemple s'écrire en fonction de G_{n+1}, D_{n+1} et C_{n+1} :

$$G_{n+1} + D_{n+1} - C_{n+1} = H_n + E_n - D_n$$

$= H_{n+1}$ donc $H_n = G_n + D_n - C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous disposons alors du système suivant qui ne comporte plus que sept équations :

$$A_{n+1} = B_n$$

$$B_{n+1} = C_n + A_n$$

$$C_{n+1} = D_n$$

$$D_{n+1} = E_n$$

$$E_{n+1} = G_n + F_n$$

$$F_{n+1} = C_n + F_n$$

$$G_{n+1} = G_n + D_n - C_n$$

De la même façon, nous pouvons encore simplifier ce système :

G_{n+1} peut par exemple s'écrire en fonction de E_{n+1}, F_{n+1} et C_{n+1} :

$$E_{n+1} - F_{n+1} + C_{n+1} = G_n + D_n - C_n$$

$= G_{n+1}$ donc $G_n = E_n - F_n + C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous disposons alors d'un système à six équations :

$$A_{n+1} = B_n$$

$$B_{n+1} = C_n + A_n$$

$$C_{n+1} = D_n$$

$$D_{n+1} = E_n$$

$$E_{n+1} = E_n + C_n$$

$$F_{n+1} = C_n + F_n$$

3- Ecriture matricielle

Nous ne pouvons plus réduire le nombre d'équations car chaque ligne du système n'est pas la combinaison linéaire d'autres lignes.

Nous pouvons alors écrire ce système à l'aide de matrices :

Soit les matrices M et X_n avec

$$X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors écrire notre système d'équations sous la forme :

$$X_{n+1} = MX_n$$

M est alors la matrice permettant de passer du rang n au rang $n+1$, nous pouvons en conclure la formule explicite suivante :

$$X_n = M^n X_0 \qquad \text{avec } X_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4- Calcul des valeurs propres

Il nous faut alors calculer la matrice M^n.

Nous allons, pour ce faire, essayer de diagonaliser la matrice M.

Nous devons alors calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.

Le polynôme de la matrice Mest défini par :

$$|M - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} (\lambda^2 - 1)$$

$$= \left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \right) (\lambda^2 - 1)$$

$$= \left(-\lambda(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \right) (\lambda^2 - 1)$$

$$= \left(\lambda^2(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)\right)(\lambda^2 - 1)$$

$$= (\lambda^2 - 1)(1-\lambda)\left(1 + \lambda^2(1-\lambda)\right)$$

Nous disposons maintenant du polynôme caractéristique de la matrice M.

Nous pouvons alors calculer les valeurs propres de la matrice M qui sont les racines du polynôme :

$$(\lambda^2 - 1)(1-\lambda)\left(1 + \lambda^2(1-\lambda)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1 = 0 \ \ ou \ 1 - \lambda = 0 \ \ ou \ 1 + \lambda^2(1-\lambda) = 0)$$

1ère équation :

$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

1 et -1 sont solutions de l'équation.

2ème équation :

$$1 - \lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Nous retrouvons la valeur propre 1, la valeur propre 1 sera alors de multiplicité 2.

3ème équation :

$$1 + \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$$

Utilisons la méthode de Cardan pour résoudre cette équation de degré 3 :

Effectuons le changement de variable $X = \lambda - \frac{1}{3}$:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(X + \frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + 3X^2\frac{1}{3} + 3X\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - X^2 - 2X\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{27} - \frac{2}{3}X - \frac{1}{9} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - \frac{1}{3}X - \frac{29}{27} = 0$$

Nous disposons de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ avec $p = -\frac{1}{3}$ et $q = -\frac{29}{27}$.

On pose $X = u + v$, l'équation devient :

$$(u+v)^3 + (u+v)\frac{-1}{3} - \frac{29}{27} = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (u+v)\frac{-1}{3} - \frac{29}{27} = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + (u+v)\frac{-1}{3} - \frac{29}{27} = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)\left(3uv - \frac{1}{3}\right) - \frac{29}{27} = 0$$

On choisit u et v tels que $3uv - \frac{1}{3} = 0$.

On obtient :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - \frac{29}{27} = 0 \\ 3uv - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - \frac{29}{27} = 0 \\ uv = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - \frac{29}{27} = 0 \\ u^3v^3 = \frac{1}{9^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 + v^3u^3 - \frac{29}{27}u^3 = 0 \\ u^3v^3 = \frac{1}{9^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 + \frac{1}{9^3} - \frac{29}{27}u^3 = 0 \quad (L_1) \\ u^3v^3 = \frac{1}{9^3} \end{cases}$$

On pose $Y = u^3$ dans (L_1) on a :

$$Y^2 - \frac{29}{27}Y + \frac{1}{9^3} = 0$$

Equation de degré 2 :

$$\Delta = \left(-\frac{29}{27}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{9^3}$$

$$\Delta = \frac{31}{27}$$

Le discriminant est positif, l'équation admet donc 2 solutions réelles :

$$Y_1 = \frac{\frac{29}{27} - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}$$

$$Y_2 = \frac{\frac{29}{27} + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}$$

Comme $Y = u^3$, $u = \sqrt[3]{Y_1}$ ou $\sqrt[3]{Y_2}$dans $\mathbb{R}$. Choisissons $u = \sqrt[3]{Y_1}$.

Or,

$$u^3 + v^3 - \frac{29}{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ v^3 = \frac{29}{27} - u^3$$

$$\Leftrightarrow\ v^3 = \frac{29}{27} - \frac{\frac{29}{27} - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ v^3 = \frac{\frac{29}{27} + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2} = Y_2$$

Donc $v = \sqrt[3]{Y_2}$ dans $\mathbb{R}$. Si on avait choisit $u = \sqrt[3]{Y_2}$, on aurait trouvé $v = \sqrt[3]{Y_1}$ (u et v jouent le même rôle).

Or $$X = u + v$$

$$X = \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}}$$

Or $$\lambda = X + \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \frac{1}{3}$$

Notons S_1la solution réelle de l'équation $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$.

$$S_1 = \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{29}{27} + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}} + \frac{1}{3}$$

$$S_1 = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \frac{\sqrt{93}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{93}}{18}} + \frac{1}{3}$$

$$S_1 = \sqrt[3]{\frac{29 + 3\sqrt{93}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{29 - 3\sqrt{93}}{54}} + \frac{1}{3}$$

S_1 est alors une valeur propre de M.

Déterminons les deux racines complexes du polynôme :

Soit a, b et c trois réels tels que :

$$(\lambda - \mathrm{S}_1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

Déterminons les valeurs de a, b et c :

$$(\lambda - S_1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda - S_1 a\lambda^2 - S_1 b\lambda - S_1 c = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

$$a\lambda^3 + (b - S_1 a)\lambda^2 + (c - S_1 b)\lambda - S_1 c = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - S_1 a = -1 \\ c - S_1 b = 0 \\ -\mathrm{S}_1 c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = S_1 - 1 \\ c = -S_1 + {S_1}^2 = \dfrac{1}{S_1} \text{ ce qui est le cas} \end{cases}$$

Nous disposons donc de l'équation :

$$(\lambda - \mathrm{S}_1)\left(\lambda^2 + (S_1 - 1)\lambda - S_1 + {S_1}^2\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$$

On résout :

$$\lambda^2 + (S_1 - 1)\lambda - S_1 + {S_1}^2 = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (S_1 - 1)^2 - 4 \times 1 \times (-S_1 + {S_1}^2)$$

$$\Delta = -3{S_1}^2 + 2S_1 + 1$$

A l'aide de la calculatrice, on remarque que $\Delta < 0$:

Il y a donc deux solutions complexes :

$$Z_1 = \frac{-S_1 + 1 - i\sqrt{3{S_1}^2 - 2S_1 - 1}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-S_1 + 1 + i\sqrt{3{S_1}^2 - 2S_1 - 1}}{2}$$

Nous disposons des six valeurs propres de la matrice M :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = S_1 \\ \lambda_5 = Z_1 \\ \lambda_6 = Z_2 \end{cases}$$

Les valeurs propres sont différentes sauf la valeur $\lambda_1 = 1$ mais nous avons vérifié que les vecteurs propres associés à cette valeur propre forment un sous-espace de dimension 2. M est alors une matrice diagonalisable.

M peut s'écrire sous la forme $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible.

$$M = PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M^n = PD^nP^{-1}$$

$$X_n = M^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0$$

5- **Calcul de la limite**

Notons $\left(x_{ij}\right)_{i,j}$les coefficients de la matrice P et $\left(y_{ij}\right)_{i,j}$les coefficients de la matrice P^{-1}:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{61} & \cdots & x_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {S_1}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {Z_1}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {Z_2}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{61} & \cdots & y_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}(-1)^n & x_{14}{S_1}^n & x_{15}{Z_1}^n & x_{16}{Z_1}^n \\ x_{21} & x_{22} & x_{23}(-1)^n & x_{24}{S_1}^n & x_{25}{Z_1}^n & x_{26}{Z_1}^n \\ x_{31} & x_{32} & x_{33}(-1)^n & x_{34}{S_1}^n & x_{35}{Z_1}^n & x_{36}{Z_1}^n \\ x_{41} & x_{42} & x_{43}(-1)^n & x_{44}{S_1}^n & x_{45}{Z_1}^n & x_{46}{Z_1}^n \\ x_{51} & x_{52} & x_{53}(-1)^n & x_{54}{S_1}^n & x_{55}{Z_1}^n & x_{56}{Z_1}^n \\ x_{61} & x_{62} & x_{63}(-1)^n & x_{64}{S_1}^n & x_{65}{Z_1}^n & x_{66}{Z_1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{61} & \cdots & y_{66} \end{pmatrix}}_{PD^nP^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous nous intéressons ensuite à la première coordonnée du vecteur X_n car c'est A_n or nous étudions le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$. Pour obtenir cette première coordonnée, nous avons besoin de la première ligne de la matrice PD^nP^{-1} que nous allons multiplier par le vecteur X_0.

Etude de la première ligne de la matrice PD^nP^{-1}:

$$(PD^nP^{-1})_{11} = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + x_{13}(-1)^n y_{31} + x_{14}{S_1}^n y_{41} + x_{15}{Z_1}^n y_{51} + x_{16}{Z_1}^n y_{61}$$

$$(PD^nP^{-1})_{12} = x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} + x_{13}(-1)^n y_{32} + x_{14}{S_1}^n y_{42} + x_{15}{Z_1}^n y_{52} + x_{16}{Z_1}^n y_{62}$$

...

$$(PD^nP^{-1})_{1j} = x_{11}y_{1j} + x_{12}y_{2j} + x_{13}(-1)^n y_{3j} + x_{14}{S_1}^n y_{4j} + x_{15}{Z_1}^n y_{5j} + x_{16}{Z_1}^n y_{6j}$$

Alors nous pouvons en conclure :

$$A_n = (X_n)_1 = (PD^nP^{-1})_{11} + 2(PD^nP^{-1})_{12} + 2(PD^nP^{-1})_{13} + 4(PD^nP^{-1})_{14} + 5(PD^nP^{-1})_{15} + 3(PD^nP^{-1})_{16}$$

Nous pouvons factoriser cette expression par chaque valeur propre (notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ les valeurs propres) :

$$A_n = (X_n)_1 = {\lambda_1}^n k_1 + {\lambda_2}^n k_2 + {\lambda_3}^n k_3 + {\lambda_4}^n k_4 + {\lambda_5}^n k_5 + {\lambda_6}^n k_6$$

Avec k_i coefficients réels tels que :

$$k_1 = x_{11}y_{11} + 2x_{11}y_{12} + 2x_{11}y_{13} + 4x_{11}y_{14} + 5x_{11}y_{15} + 3x_{11}y_{16}$$

$$k_2 = x_{12}y_{21} + 2x_{12}y_{22} + 2x_{12}y_{23} + 4x_{12}y_{24} + 5x_{12}y_{25} + 3x_{12}y_{26}$$

...

$$k_j = x_{1j}y_{j1} + 2x_{1j}y_{j2} + 2x_{1j}y_{j3} + 4x_{1j}y_{j4} + 5x_{1j}y_{j5} + 3x_{1j}y_{j6} \; pour\ tout\ j \in \{1, \dots 6\}$$

Alors k_j est un coefficient qui ne dépend pas de n.

Nous pouvons maintenant calculer la limite recherchée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(X_{n+1})_1}{(X_n)_1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{{\lambda_1}^{n+1}k_1 + {\lambda_2}^{n+1}k_2 + {\lambda_3}^{n+1}k_3 + {\lambda_4}^{n+1}k_4 + {\lambda_5}^{n+1}k_5 + {\lambda_6}^{n+1}k_6}{{\lambda_1}^n k_1 + {\lambda_2}^n k_2 + {\lambda_3}^n k_3 + {\lambda_4}^n k_4 + {\lambda_5}^n k_5 + {\lambda_6}^n k_6}$$

Nous remarquons une forme indéterminée du type plus l'infini sur plus l'infini. Pour lever cette indétermination nous allons factoriser par la valeur propre qui possède le plus grand module :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1\ ;\ |1| = 1 \\ \lambda_2 = 1;\ |1| = 1 \\ \lambda_3 = -1;\ |-1| = 1 \\ \lambda_4 = S_1\ ;\ |S_1| \simeq\ 1.4655 \\ \lambda_5 = Z_1;\ |Z_1| \simeq\ 0.826 \\ \lambda_6 = Z_2;\ |Z_2| \simeq\ 0.826 \end{cases}$$

Nous remarquons que S_1 possède le plus grand module, nous choisissons de factoriser par S_1 soit λ_4.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_1{}^{n+1}k_1+\lambda_2{}^{n+1}k_2+\lambda_3{}^{n+1}k_3+\lambda_4{}^{n+1}k_4+\lambda_5{}^{n+1}k_5+\lambda_6{}^{n+1}k_6}{\lambda_1{}^{n}k_1+\lambda_2{}^{n}k_2+\lambda_3{}^{n}k_3+\lambda_4{}^{n}k_4+\lambda_5{}^{n}k_5+\lambda_6{}^{n}k_6}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_4{}^{n+1}\left(\frac{\lambda_1{}^{n+1}k_1}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_2{}^{n+1}k_2}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_3{}^{n+1}k_3}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_4{}^{n+1}k_4}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_5{}^{n+1}k_5}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_6{}^{n+1}k_6}{\lambda_4{}^{n+1}}\right)}{\lambda_4{}^{n}\left(\frac{\lambda_1{}^{n}k_1}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_2{}^{n}k_2}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_3{}^{n}k_3}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_4{}^{n}k_4}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_5{}^{n}k_5}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_6{}^{n}k_6}{\lambda_4{}^{n}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_4{}^{n+1}}{\lambda_4{}^{n}}\times\frac{\left(\frac{\lambda_1{}^{n+1}k_1}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_2{}^{n+1}k_2}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_3{}^{n+1}k_3}{\lambda_4{}^{n+1}}+k_4+\frac{\lambda_5{}^{n+1}k_5}{\lambda_4{}^{n+1}}+\frac{\lambda_6{}^{n+1}k_6}{\lambda_4{}^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\lambda_1{}^{n}k_1}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_2{}^{n}k_2}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_3{}^{n}k_3}{\lambda_4{}^{n}}+k_4+\frac{\lambda_5{}^{n}k_5}{\lambda_4{}^{n}}+\frac{\lambda_6{}^{n}k_6}{\lambda_4{}^{n}}\right)}$$

$$=\frac{\lambda_4\times k_4}{k_4}=\lambda_4 \qquad car \lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_j{}^{n+1}}{\lambda_4{}^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_j{}^{n}}{\lambda_4{}^{n}}=0 \;\; pour\ j\neq 4\ puisque \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_4}\right|<1$$

La limite de $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ lorsque n tend vers plus l'infini vaut λ_4 soit S_1.

La réponse à la question posée par l'enseignant chercheur est donc : $S_1=\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{54}}+\frac{1}{3}$

VII - <u>Conclusion</u>

Lorsqu'on calcule un terme (de rang assez grand) de la suite de Conway en binaire, sa longueur est $\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{54}}+\frac{1}{3}$ fois supérieure à la longueur du terme qui le précède (ou à la longueur de l'étage précédent de la pyramide). D'un terme à l'autre, la longueur a augmenté d'environ 46%.

Donc la constante de Darchicourt vaut : $\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{54}}+\frac{1}{3}$.

Nous pouvons faire le parallèle avec la suite de Conway en base 10 et se demander vers quelle valeur tend la suite des rapports des longueurs de deux termes consécutifs.

VIII - <u>Parallèle en base 10</u>

Conway a démontré que la suite était composée de 94 blocs et le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ lorsque n tend vers plus l'infini, tend vers un nombre qui est la seule solution réelle d'un polynôme de degré 71 :

$x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} + - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} -7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} + 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^9 + x^7 - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 6 = 0$

L'unique racine réelle de ce polynôme est environ égale à 1.303678.

En base 10 :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}\simeq 1.303678$$

D'un terme de la suite de Conway en base 10 (de rang assez grand) à l'autre, la longueur a augmenté d'environ 30%.

Donc la constante de Conway vaut environ : 1.303678.