# Compter les uns par paquets de deux

2019 - 2020

**Auteur :** Massil Ziane Khodja — classe de Seconde

**Établissement :** Lycée Carnot, Paris

**Professeur :** Ariane Martin — Doctorante, ENS Paris-Saclay

**Chercheur :** Amic Frouvelle — Université Paris-Dauphine

**Présentation du sujet :**
Dans ce sujet de MATh.en.JEANS, nous allons étudier une série de chiffres composée seulement de "1" et de "2" et avec des règles proches de celles de la suite de Conway. Durant cette étude, nous avons montré que la fréquence de "1" et de "2" se stabilise. Nous avons également déterminé une méthode pour calculer le nombre de "1" et de "2" dans une telle suite sans avoir à développer la série de chiffre. [1]

## Sommaire

# 1 Présentation du sujet

## 1.1 Les règles

On part d’un ou plusieurs chiffres, qui peuvent être soit des 1 ou des 2, qui constitueront la première étape. À chaque étape, on lit ce qui est écrit à la ligne précédente. Cependant, on ne regroupe que les paires de “1”. On développe la première étape pour avoir celles d’après en respectant des règles :

- Les “1” deviennent à l’étape d’après “11”, car on voit “un 1” ce qui donne “11” ;
- Les “2” deviennent à l’étape suivante “12”, on voit “un 2” ce qui donne “12” ;
- Lorsque deux “1” sont collés ensemble on on les regroupe par paire ainsi “11” devient après une étape “21”. On voit “deux 1” ce qui donne “21” ;
- Cependant on ne regroupe pas les paires de deux, en évoluant d’une étape “22” ne deviendra pas “22” mais “1212” ;
- On ne regroupe pas les triplets de “1”, “111” ne deviendra pas à l’étape suivante “31”, “111” deviendra donc à l’étape suivante “21 11”.

[2]

## 1.2 Exemple

Dans le sujet à la première étape on commence par “2”. Ainsi en appliquant les règles vues précédemment et en se limitant à 5 étapes on a :
Si on regarde la première étape de la Figure 1, on voit qu’il y a “un 2” ce qui donne donc à l’étape 2 : “12”.

Le “1” deviendra à l’étape 3 : “11” et le “2” : “12”. On a donc à l’étape 3 une série de chiffres“1112”.

À l’étape 3, on a deux “1” côte à côte, ils forment donc une paire, à l’étape 4 ils deviendront donc “21”. Ensuite, toujours à l’étape 3, on a “un 1” qui deviendra à l’étape 4 : “11”. Pour finir on a “un 2” qui deviendra à l’étape 4 : “12”. On a donc l’étape 4 qui sera composée d’une série de chiffres “211112” comme on peut le voir sur la Figure 1.

Le premier “2” deviendra à l’étape 5 : “12”. Ensuite, on a une première paire de “1” qui formera donc à l’étape 5 : “21”. On a ensuite une deuxième paire de “1” qui deviendra aussi “21” à

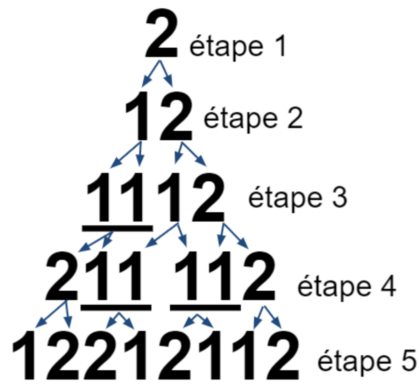


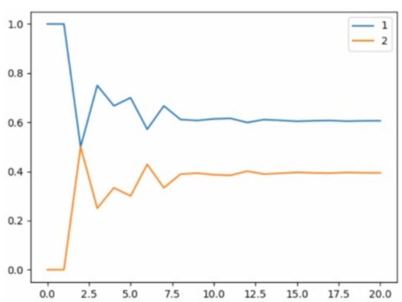

FIGURE 1 – Cas du sujet avec pour première étape : “2”

l’étape 5. Pour finir, on a un autre “2” qui deviendra “12” à l’étape 5. Ainsi l’étape 5 sera composée d’une série de chiffres “12212112” comme on peut le voir sur l’image 1.

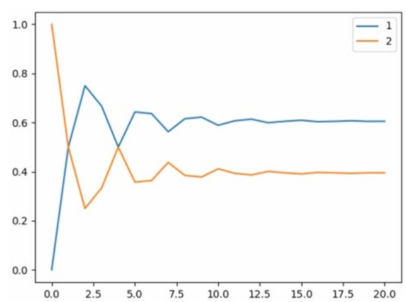
## 2 Fréquence de “1” et de “2”

On calcule la fréquence de “1” et de “2” pour chaque étape. On ne cumule donc pas le nombre de “1” et de “2” au fil des étapes. Par exemple, la fréquence de “1” et de “2” à l’étape 2 de la suite montrée dans la Figure 1 est de 50% pour 1 et 50% pour 2, car il y a un “1” et un “2”.

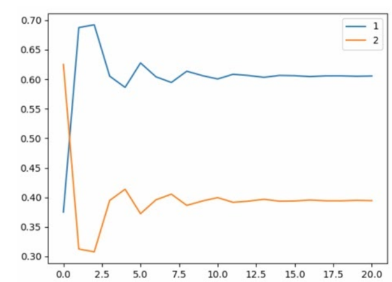
On obtient ici à l’aide d’un programme python des graphiques montrant la fréquence de “1” et de “2” à chaque étape (jusqu’à 20) en commençant par des premières étapes différentes :




(a) Première étape : “1”




(b) Première étape : “2”




(c) Première étape : “22112212”

FIGURE 2 – Fréquences de “1” et de “2” pour différentes premières étapes

On voit sur les trois graphiques de la Figure 2 que les fréquences de “1” et de “2” finissent toujours par se stabiliser, que l’on commence par “1” par “2” ou une suite complètement arbitraire :

- La fréquence de “1” se stabilise à environ 60%
- La fréquence de “2” se stabilise à environ 40%

Dans la suite de l’article, on traitera uniquement le cas d’une suite dont la première étape est “2”.

# 3 Les motifs

En calculant quelques étapes de la suite à la main (Figure 3) puis grâce à un programme, on s'est vite rendu compte qu'il faut trouver une méthode plus efficace pour déterminer les différentes étapes de la suite.

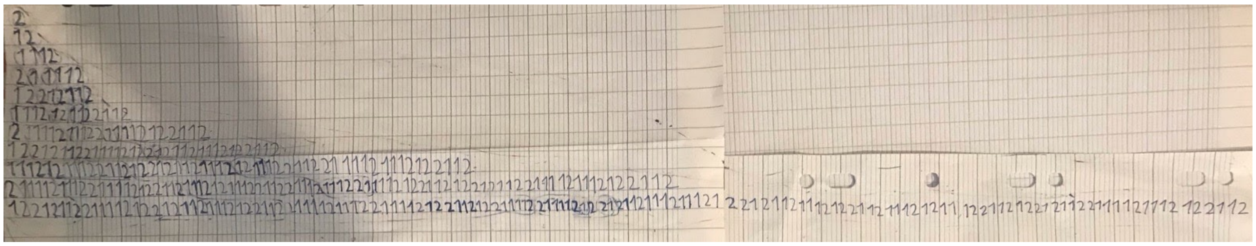


FIGURE 3 – Les 11 premières étapes de la suite de premier terme "2" (à la main)

## 3.1 Définition d'un motif

Sachant que les "2" n'interagissent pas quand ils sont côte à côte, ils permettent donc d'isoler des étapes en plusieurs parties que l'on appellera motifs.

Dans les motifs sont inclus les "1" séparés par les "2" ainsi que le "2" qui se situe à leur droite. Comme on peut le voir par exemple à la 2$^e$ ligne de l'exemple de la Figure 4, on a un premier motif composée de trois "1" et de un "2" : "1112". Le deuxième motif est composé de un "1" et de un "2" qui permet de séparer ce motif du troisième. En répétant ce raisonnement on voit que les "2" qui sont inclus dans un motif sont toujours à droite de ce dernier.

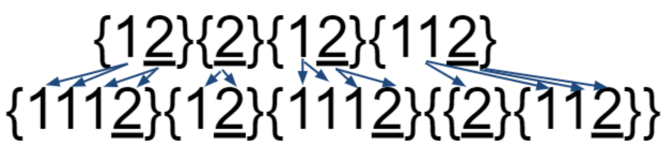



FIGURE 4 – Évolution des motifs de la 5$^{\text{ème}}$ à la 6$^{\text{ème}}$ étape

En effet, en évoluant une étape "2" devient "12". il y aura donc un "1" qui sera à gauche. Ce "1" pourra interagir avec les autres "1" du motif. et à droite toujours un "2" qui isolera les "1". Le "2" qui était a droite a donc eu une influence sur le motif il fait donc bien partie du motif.

On peut identifier cinq types de motifs différents :

- "2" ;
- "12" ;
- "112" ;
- "1112" ;
- "11112" ;

**Remarque :** Cela n'est vrai que dans le cas traité ici. Dans d'autres cas avec des premières étapes différentes on peut obtenir ces mêmes motifs mais aussi un motif "1" et un motif "11".

### 3.2 L'évolution des motifs

Comme on sait de quoi est constitué chaque motif on peut calculer le nombre de "1" (que l'on appellera $N_1$) et le nombre de "2" ($N_2$) d'une étape à l'aide de ces motifs il est donc intéressant de voir l'évolution de chaque motif après une étape :

— "2" devient "12" le motif "2" devient donc un motif "12" ;
— "12" devient "1112" le motif "12" devient donc un motif "1112" ;
— "112" devient "2112" le motif "112" se divise donc en une motif "2" et un motif "112" ;
— "1112" devient "211112" le motif "1112" se divise donc en un motif "2" et un motif "11112" ;
— "11112" devient "212112" le motif "11112" se divise donc en un motif "2",un motif "12" et un motif "112".

On remarque que chacun de ces motifs deviennent, en évoluant, des motifs qui font partie des cinq motifs de départ. À partir de ces motifs, il est donc impossible de voir apparaître d'autres types de motifs. On remarque également que l'exemple proposé au début du sujet est "2", ce qui correspond à un des cinq motifs. Dans notre cas, ces cinq motifs sont donc les seuls à exister.

### 3.3 Calcul du nombre de motifs

Comme on sait ce que chaque motif devient après une étape alors, si pour une étape donnée on connaît le nombre de motifs qu'elle contient, on saura le nombre de motifs que contient l'étape suivante et ainsi de suite.

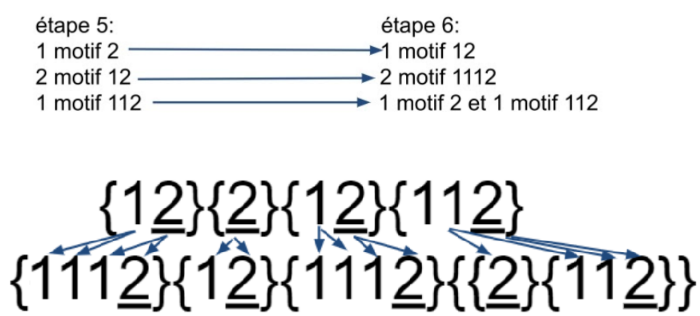



Figure 5 – Évolution des motifs de la 5ème à la 6ème étape

À l'étape 5 on voit qu'il y a un motif "2". Sachant qu'un motif "2" donne après une étape le motif "12", à l'étape 6 il y aura donc un motif "12". On voit qu'il y a également deux fois le motif "12" à l'étape 5. Sachant qu'un motif "12" donne après une étape le motif "1112", à l'étape 6 il y aura donc deux fois le motif "1112". Enfin, il y a un motif "112" à l'étape 5. Sachant qu'un motif "112" donne après une étape un motif "2" et un motif "112", à l'étape 6 il y aura donc un motif "2" et un motif "112". On peut en conclure que l'étape 6 sera constituée des motifs "12", "2", "112" ainsi que de deux motifs "1112" comme on peut le voir sur la Figure 5.

Ainsi, à la main, on peut donc obtenir un tableau nous indiquant le nombre de motifs pour chaque étape (jusqu'à 10 pour ce tableau de la Figure 6). En écrivant $N\{m\}$ le nombre de fois où le motif $m$ apparaît à l'étape $E$.

| Etape | N{2} | N{12} | N{112} | N{1112} | N{11112} | N total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 |
| 7 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 8 |
| 8 | 4 | 5 | 3 | 1 | 1 | 14 |
| 9 | 5 | 5 | 4 | 5 | 1 | 20 |
| 10 | 10 | 6 | 5 | 5 | 5 | 31 |

FIGURE 6 – Tableau montrant le nombre de motifs pour les 10 premières étapes

Pour faciliter la construction du tableau, on peut utiliser les formules suivantes (qui sont valables pour $E \geq 1$) :

— Comme vu précédemment seuls les motifs "112", "1112" et "11112" donnent en évoluant le motif "2". Le nombre de motifs "2" de l'étape $E+1$ va donc dépendre de celui des motifs "112", "1112" et "11112" de l'étape précédente :

$$N\{2\}(E+1) = N\{112\}(E) + N\{1112\}(E) + N\{11112\}(E) \tag{1}$$

— Seuls les motifs "2" et "11112" donnent en évoluant le motif "12". Le nombre de motifs "12" de l'étape $E+1$ va donc dépendre de celui des motifs "2" et "11112" de l'étape précédente :

$$N\{12\}(E+1) = N\{2\}(E) + N\{11112\}(E) \tag{2}$$

— On sait que les seuls motifs qui en évoluant donnent le motif "112" sont les motifs "112" et "11112". On a donc :

$$N\{112\}(E+1) = N\{112\}(E) + N\{11112\}(E) \tag{3}$$

— Sachant que le seul motif à donner en évoluant le motif "1112" est le motif "12", on a donc

$$N\{1112\}(E+1) = N\{12\}(E) \tag{4}$$

— Sachant que le seul motif à donner en évoluant le motif "11112" est le motif "1112", on a donc :

$$N\{11112\}(E+1) = N\{1112\}(E) \tag{5}$$

Les formules (1) à (5) permettent de remplir plus rapidement le tableau de la figure 6. Cela permet donc de déterminer le nombre de motifs d'une étape $E'$ à partir des motifs d'une étape $E$.

**Remarque :** En additionnant le nombre de “112” et celui de “11112” (Équations (3) et (5)) on trouve :

$$N\{112\}(E+1) + N\{11112\}(E+1) = N\{112\}(E) + N\{11112\}(E) + N\{1112\}(E)$$

Ce qui correspond au nombre de “2” à l'étape $E+1$ (Équation (1)). On a donc :

$$N\{2\}(E+1) = N\{112\}(E+1) + N\{11112\}(E+1) \tag{6}$$

En comparant l'équation (3) écrite à l'étape $E+1$ et l'équation (6) :

$$\begin{aligned} N\{112\}(E+2) &= N\{112\}(E+1) + N\{11112\}(E+1) \\ N\{2\}(E+1) &= N\{112\}(E+1) + N\{11112\}(E+1) \end{aligned}$$

On remarque que :

$$N\{112\}(E+2) = N\{2\}(E+1) \tag{7}$$

D'après l'équation (6), on sait que :

$$N\{2\}(E+2) = N\{112\}(E+2) + N\{11112\}(E+2)$$

Or d'après la remarque précédente (Équation (7)), on peut écrire :

$$N\{2\}(E+2) = N\{2\}(E+1) + N\{11112\}(E+2)$$

Grâce à l'équation (5), on a donc :

$$N\{2\}(E+2) = N\{2\}(E+1) + N\{1112\}(E+1) \tag{8}$$

Les formules (7) et (8) sont dérivées des formules précédentes et sont plus pratiques pour calculer le nombre de motifs. On utilise ces formules, ainsi que les formules (2), (4) et (5), afin de réaliser un programme python (Annexe A, lignes 17 à 21) permettant d'avoir le nombre de motifs pour toute étape $E' > E$.

## 3.4 Calcul du nombre de “1” et de “2” pour des étapes plus grandes

Comme on sait de quoi est composé chaque motif, on peut en déduire l'équation (9), avec $N_1$ le nombre de “1” et $N_2$ le nombre de “2”.

$$\begin{array}{ll} N_1\{2\} = 0 & N_2\{2\} = 1 \\ N_1\{12\} = 1 & N_2\{12\} = 1 \\ N_1\{112\} = 2 & N_2\{112\} = 1 \\ N_1\{1112\} = 3 & N_2\{1112\} = 1 \\ N_1\{11112\} = 4 & N_2\{11112\} = 1 \end{array} \tag{9}$$

Pour déterminer le nombre de “1” et le nombre de “2”, nous avons utilisé un programme python (Annexe A) dont le principe est le suivant, pour calculer le nombre de motifs à une étape $E'$, on utilise les équations (2),(4), (5), (7) ainsi que (8) (lignes 17 à 21). Puis, pour

N1= 1986948091129366852514828477510503725663409311398437314817807270328651792174967941377608378265107461026791015244972968070606509866315613793156074355037010560648291692430459104530153013586020380332971778679567089567769277866868230525238001210210737568365066333729281637971456456394679839670227602176477451728899666051846464265977145718483018419673189532463407492577611255646581565326629797 59

(a) Nombre de “1”

N2= 1294478924932722017248584480442160013778249385227933142041041448603398707054072613521182065005084221828597479109353087096617888981769726267057585268210219400992659814526263606704469334391983944629513247008068430670618912671257868976019526008529801627281837621670782128015736391179843245980867364768656586603607171416045421167758032602635798674930586221643968951921512958411687835583104308 27

(b) Nombre de “2”

Figure 7 – Nombre de “1” et de “2” à l’étape 2020

passer du nombre de motifs au nombre de “1” et nombre de “2” on utilise les formules de l’équation (9) (lignes 25 et 27).

Grâce à ce programme python, on peut donc avoir $N_1$ et $N_2$ pour des étapes très grandes. Par exemple en commençant par l’étape “2”, on trouve pour l’étape 2020 les nombres de “1” et de “2” affichés dans la Figure 7 :
Soit : [3]

$$N_1 \simeq 10^{389} \text{ et } N_2 \simeq 10^{389} \tag{10}$$

## 3.5 Fréquences des motifs et taux d’augmentation du nombre de motifs

En observant les fréquences des motifs avec $E_{max} = 20$, on peut constater que la fréquence de chaque motif a tendance à se stabiliser (Figure 8) :

- $\sim 29.1$ % pour le motif “2” ;
- $\sim 25.4$ % pour le motif “12” ;
- $\sim 18.7$ % pour le motif “112” ;
- $\sim 16.3$ % pour le motif “1112” ;
- $\sim 10.4$ % pour le motif “11112” ;

[4]

On peut aussi voir que $\frac{N_{total}(E+1)}{N_{total}(E)}$, c’est a dire l’augmentation du nombre total de motifs en passant d’une étape $E$ à l’étape $E+1$, a tendance à se stabiliser autour de $1,559$, à partir de $E \simeq 20$ (Figure 9). Ainsi, si à une étape donnée on connaît le nombre de motifs qu’elle contient et donc son nombre total de motifs, alors on peut calculer le nombre de motifs qu’elle contiendra aux étapes suivantes (Equations (11)). On note $E$ l’étape de laquelle on part et $E'$ l’étape dont veut connaître le nombre de motifs.

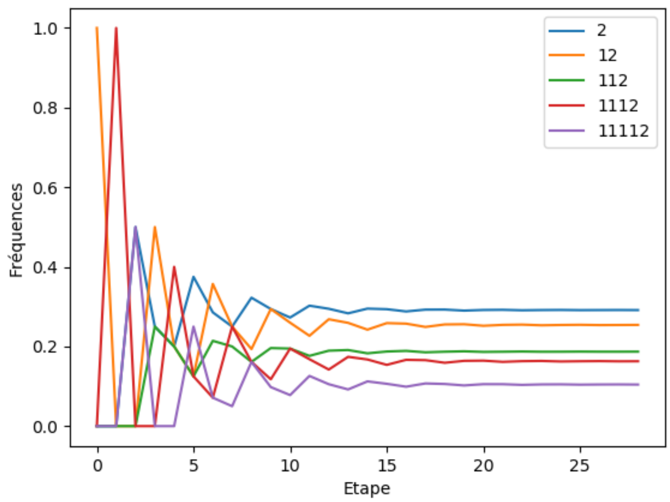



FIGURE 8 – Fréquence de chaque motif pour les étapes de 2 à 30 de la suite de premier terme "2"

$$\begin{aligned}
&N\{2\}(E') \sim N\{2\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}\\
&N\{12\}(E') \sim N\{12\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}\\
&N\{112\}(E') \sim N\{112\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}\\
&N\{1112\}(E') \sim N\{1112\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}\\
&N\{11112\}(E') \sim N\{11112\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}
\end{aligned} \tag{11}$$

[5]

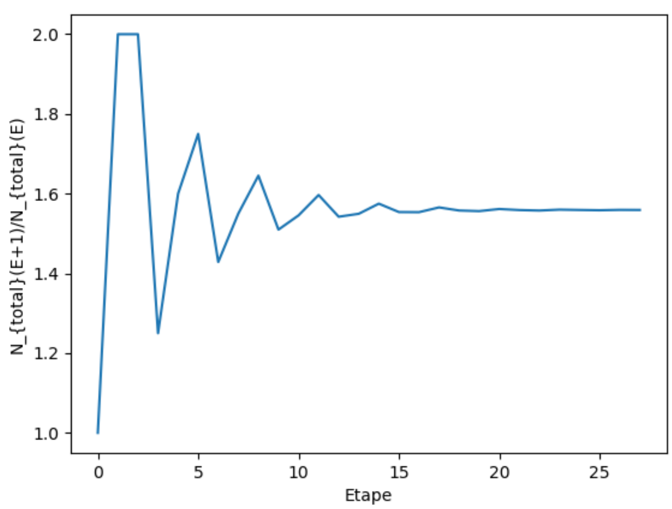



FIGURE 9 – Taux d'augmentation du nombre total de motifs

Comme on sait ce que chaque motif contient, on peut calculer le nombre de "1" et le nombre de "2" à l'étape $E'$ à partir de ces formules. Pour cela on pose $f_1\{E\}$ la fréquence de "1" et

$f_2\{E\}$ la fréquence de “2” à l’étape $E$. On note également $f(m)\{E\}$ la fréquence du motif $m$ à l’étape $E$. De plus, on pose $N_T(m)$ le nombre total de chiffres du motif $m$. Enfin, l’ensemble des motifs {2, 12, 112, 1112, 11112} est noté $M$.

On calcule donc le nombre de “2” à l’étape $E$, ce qui revient à multiplier le nombre des différents motifs par le nombre de fois où le chiffre “2” apparaît dans ces motifs, et à faire la somme des ces produits. Par exemple, on a $f(12)\{E\}N_{total}\{E\}$ fois le motif “12” à l’étape $E$, ce qui représente $f(12)\{E\}N_{total}\{E\}N_2\{12\}$ fois le nombre de chiffres “2”. Le nombre total de chiffres “2” est donc la somme $f_2\{E\} = \sum_{m\in M} f(m)\{E\}N_{total}\{E\}N_2\{m\}$.

On obtient le nombre total de chiffres avec la même méthode mais en remplaçant $N_2\{m\}$ par $N_T\{m\}$ dans les calculs. La fréquence de “2” est égale au nombre de chiffres “2” divisé par le nombre total de chiffres. On peut donc écrire l’équation : [6]

$$f_2\{E\} = \frac{\sum_{m\in M} f(m)\{E\}N_{total}\{E\}N_2\{m\}}{\sum_{m\in M} f(m)\{E\}N_{total}\{E\}N_T\{m\}}$$

On peut en déduire l’équation suivante :

$$f_2\{E\} = \frac{\sum_{m\in M} f(m)\{E\}N_2\{m\}}{\sum_{m\in M} f(m)\{E\}N_T\{m\}} \tag{12}$$

Les fréquences des motifs se stabilisent, pour $E \geq 20$ on peut approximer la fréquence de “2” en utilisant l’équation (12) :

$$f_2 \simeq \frac{29N_2\{2\} + 25N_2\{12\} + 19N_2\{112\} + 16N_2\{1112\} + 10N_2\{11112\}}{29N_T\{2\} + 25N_T\{12\} + 19N_T\{112\} + 16N_T\{1112\} + 10N_T\{11112\}}$$

Sachant que $f_1\{E\} + f_2\{E\} = 1$ on déduit que $f_1\{E\} = 1 - f_2\{E\}$. Pour une grande étape, on trouve en faisant l’application numérique :

— $f_1 \simeq 60\%$
— $f_2 \simeq 40\%$

On retrouve donc les résultats que l’on avait trouvé grâce à la figure 2.
Cependant ces formules sont très approximatives, de plus, la stabilisation des fréquences et du taux d’augmentation ne sont vraies que pour des étapes relativement grandes. Il est donc recommandé d’appliquer cette formule avec $E \geq 20$. En effet, on constate une stabilisation du taux d’augmentation autour de 1,559 avec une variation de $\pm 0,3$ % à partir de $E \sim 20$.

# 4 Conclusion

On a pu constater que, quelque soit le début, la fréquence de “1” et de “2” finit toujours par se stabiliser : environ 60% de “1” et environ 40% de “2”.

Chaque étape est constituée de motifs qui évoluent indépendamment les uns des autres en d’autres motifs. On peut donc déterminer le nombre de motifs des étapes suivantes. Cela nous à permis de déterminer de manière exacte le nombre de "1" et de "2" pour des grandes étapes avec l'aide d'un programme python.

Cependant ce programme python a des limites et au bout d'un très grand nombre d'étapes il sera incapable d'effectuer les calculs. Mais on a pu observer une stabilisation de la fréquence de chaque motif et du taux d'augmentation du nombre total de motifs. Cela peut nous permettre d'avoir une estimation du nombre de "1" et de "2" pour ces très grandes étapes. Cependant, cette formule reste très approximative et permet uniquement d'avoir un ordre de grandeur du nombre de "1" et de "2".

Mais, les découvertes faites sur les motifs concernent principalement l'exemple traité dans ce sujet où le début est "2". Si le début était différent on aurait probablement de nouveaux motifs qui se formeraient avec des évolutions et des fréquences différentes. Pour continuer ce sujet, nous pouvons nous poser les question sur ce qu'il se passerait en changeant légèrement les règles du sujet : "Et si on groupe aussi les paires de 2 ? Et les triplets de 1 ?. . . "
En changeant les règles, on aurait probablement des propriétés complètement différentes qui seraient intéressantes à découvrir.

# 5 Remerciements

Je remercie Amic Frouvelle et Philippe Paul pour leur aide dans l'avancée du sujet.

Je remercie Ariane pour m'avoir aussi beaucoup aidé dans l'avancée du sujet et pour superviser les séances de MATh.en.JEANS.

Je remercie Adélie, Grégoire, Pierre-Alexandre, Eliott, Jules de très bons compagnons durant cette année de MATh.en.JEANS ainsi que pour leur avis très pertinent sur ma présentation orale.

Je remercie le lycée Carnot où les séances MATh.en.JEANS ont pu avoir lieu.

Je remercie l'organisation MATh.en.JEANS sans laquelle toutes les découvertes sur ce sujet ainsi que cet article n'auraient été possibles.

Je voudrais également rendre hommage à John Horton Conway (1937-2020) qui a créé la suite dont ce sujet est dérivé.

# Annexe

```python
#on commence par mettre un nombre  pour chaque motif correspondant à une étape de base: e
NM2=0 #NM2 correspond au nombre de motifs "2"
NM12=1 #NM12 au nombre de motifs "12"
NM112=0 #NM112 au nombre de motifs "112"
NM1112=0 #NM1112 au nombre de motifs "1112"
NM11112=0 #NM11112 au nombre de motifs "11112"
E=int(input("étape voulue ?: ")) #cela permet de choisir à quelle étape on veut le nombre de motifs
e=2 #l'étape de base est l'étape 2
while e<E: #cela nous permet d'effectuer les calculs du nombre de motifs jusqu'à l'étape voulue
    #on utilise des variables intérmédiaires pour stocker temporairement le nombre de motifs
    nm2=NM2
    nm12=NM12
    nm112=NM112
    nm1112=NM1112
    nm11112=NM11112
    #on calcule les nombres des nouveaux motifs à l'étape suivante en utilisant les formules trouvées précédement
    NM2=nm2+nm1112
    NM12=nm2+nm11112
    NM112=nm2
    NM1112=nm12
    NM11112=nm1112
    e+=1 #le numéro de l'étape connue se met à jour
#une fois la boucle while terminée on affiche les résultats
print("NM2=",NM2,"NM12=",NM12,"NM112=",NM112,"NM1112=",NM1112,"NM11112=",NM11112,)
N2=NM2+NM12+NM112+NM1112+NM11112 #N2 correspond au nombre de 2
#on applique les formules pour calculs N1 et N2 à partir du nombre de motifs

N1=NM12+NM112*2+NM1112*3+NM11112*4 #N1 correspond au nombre de 1
print("N1=",N1,"N2=",N2)
```

FIGURE A – Programme python

# Notes d'édition

[1] Cette phrase pourrait être trompeuse. Le lecteur peut penser qu'une expression générale est déterminée donnant les nombres de 1 et de 2 dans le $n$-ième terme de la suite en fonction de $n$. Même pour les suites de motifs une telle expression n'est pas fournie. Il faut cependant observer que l'introduction des motifs permet de calculer ces nombres de manière assez simple, au moyen d'une récurrence sur le nombre des différents motifs à chaque étape. L'algorithme correspondant paraît beaucoup plus efficace que celui basé sur les règles originales.

[2] Il faut ajouter une règle : les regroupements sont faits de gauche à droite. Par exemple '111' devient '2111' et non '1121'.

[3] Ici le symbole $\simeq$ signifie que les deux quantités sont du même ordre de grandeur et non qu'elles sont très proches. Pour ce dernier cas, le symbole $\sim$ est utilisé dans la suite.

[4] Une question naturelle à propos de ces pourcentages est de savoir s'ils peuvent être obtenus de manière directe, sans recourir à des calculs informatiques. L'auteur ramène leur étude à celle d'un système d'équations de récurrence linéaires (les équations (1) à (5) ou le système équivalent avec les équations (7) et (8)) ; un lecteur familier avec les méthodes de résolutions des systèmes de ce type pourra essayer de confirmer les résultats donnés ici.

[5] Ces approximations sont pertinentes car les fréquences de tous les motifs se stabilisent vers des valeurs constantes. Les cinq équations peuvent également être raccourcies en $N\{m\}(E') \sim N\{m\}(E) \times 1,559^{(E'-E)}$, où $m$ est un motif arbitraire.

[6] Les trois formules suivantes peuvent être très simplifiées en observant que $N_2\{m\} = 1$ pour tous les motifs m. Cela implique que dans les deuxième et troisième formules le numérateur est la somme des fréquences de tous les motifs, et donc il est simplement égal à 100.