Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Comment compter avec deux doigts

Année 2012 – 2013

Zoé BIGOT, Cassandra GENEST, Gaëlle HERY, Louise LEPORT, Elisa MOULINET, Evan PAIRIN, Baptiste RONCIER, Elise RONDEAU, Maëlys VEILLARD, élèves de 5ème

Encadrés par Sylvie RIGOURD

Établissement : Collège Saint-Magloire de Dol-de-Bretagne (35)

Chercheuse : Françoise DAL'BO, IRMAR, Université de Rennes 1.

Présentation du sujet

Tout a commencé ce matin du 30/12/3012. Nous avons pris notre fusée « Hop-Hop » pour aller sur la lune. Mais par erreur de parcours, nous sommes arrivés sur une étoile inconnue. Nous la baptisons « Hipopotamus ».

Soudain une créature surgit de nulle part, elle est étrange : c'est un « hipopotamusien ». Il a 2 ailes, 3 jambes et 2 bras. Au bout de chaque bras il y a un seul doigt. Il nous fait peur ! Il nous explique qu'il s'appelle « Xeud » et qu'il habite sur cette étoile « Hipopotamus ». Les habitants sont des « hipopotamusiens ». Ils nous accueillent les bras ouverts.

Xeud nous emmène dans son école « Proutalala ». Il calcule avec 2 doigts alors que nous calculons avec 10 doigts. Nous décidons alors de fabriquer une calculatrice qui permet de convertir nos calculs. Mais avant nous devons comprendre comment ils comptent et font des opérations.

LA BASE 2

Dans notre système décimal, nous utilisons dix chiffres de 0 à 9.
Par mimétisme, nous procédons de la même façon pour établir la liste des nombres en base 2 : nous utiliserons donc deux chiffres, le 0 et le 1.
Voici les premiers nombres en base 2, avec leur correspondance en base 10.

Base 2							Base 10		
						0			0
						1			1
					1	0			2
					1	1			3
				1	0	0			4
				1	0	1			5
				1	1	0			6
				1	1	1			7
			1	0	0	0			8
			1	0	0	1			9
			1	0	1	0		1	0
			1	0	1	1		1	1
			1	1	1	0		1	2
			1	1	1	1		1	3
		1	0	0	0	0		1	4
		1	0	0	0	1		1	5
		1	0	0	1	0		1	6
		1	0	0	1	1		1	7
		1	0	1	0	0		1	8
		1	0	1	0	1		1	9
		1	0	1	1	0		2	0
		1	0	1	1	1		2	1
		1	1	0	0	0		2	2
		1	1	0	0	1		2	3
		1	1	0	1	0		2	4
		1	1	0	1	1		2	5
		1	1	1	0	0		2	6
		1	1	1	0	1		2	7
		1	1	1	1	0		2	8
		1	1	1	1	1		2	9
	1	0	0	0	0	0		3	0
	1	0	0	0	0	1		3	1
	1	0	0	0	1	0		3	2
	1	0	0	0	1	1		3	3
	1	0	0	1	0	0		3	4
	1	0	0	1	0	1		3	5
	1	0	0	1	1	0		3	6
	1	0	0	1	1	1		3	7
	1	0	1	0	0	0		3	8
	1	0	1	0	0	1		3	9
	1	0	1	0	1	0		4	0
	1	0	1	0	1	1		4	1
	1	0	1	1	0	0		4	2
	1	0	1	1	0	1		4	3
	1	0	1	1	1	0		4	4
	1	0	1	1	1	1		4	5
	1	1	0	0	0	0		4	6
	1	1	0	0	0	1		4	7
	1	1	0	0	1	0		4	8
	1	1	0	0	1	1		4	9
	1	1	0	1	0	0		5	0
	1	1	0	1	0	1		5	1
	1	1	0	1	1	0		5	2
	1	1	0	1	1	1		5	3
	1	1	1	0	0	0		5	4
	1	1	1	0	0	1		5	5
	1	1	1	0	1	0		5	6
	1	1	1	0	1	1		5	7
	1	1	1	1	0	0		5	8
	1	1	1	1	0	1		5	9
	1	1	1	1	1	0		6	0
	1	1	1	1	1	1		6	1
1	0	0	0	0	0	0		6	2
1	0	0	0	0	0	1		6	3
1	0	0	0	0	1	0		6	4
1	0	0	0	0	1	1		6	5
1	0	0	0	1	0	0		6	6
1	0	0	0	1	0	1		6	7
1	0	0	0	1	1	0		6	8
1	0	0	0	1	1	1		6	9
1	0	0	1	0	0	0		7	0
1	0	0	1	0	0	1		7	1
1	0	0	1	0	1	0		7	2
1	0	0	1	0	1	1		7	3
1	0	0	1	1	0	0		7	4
1	0	0	1	1	0	1		7	5
1	0	0	1	1	1	0		7	6
1	0	0	1	1	1	1		7	7
1	0	1	0	0	0	0		7	8
1	0	1	0	0	0	1		7	9
1	0	1	0	0	1	0		8	0
1	0	1	0	0	1	1		8	1
1	0	1	0	1	0	0		8	2
1	0	1	0	1	0	1		8	3
1	0	1	0	1	1	0		8	4
1	0	1	0	1	1	1		8	5
1	0	1	1	0	0	0		8	6
1	0	1	1	0	0	1		8	7
1	0	1	1	0	1	0		8	8
1	0	1	1	0	1	1		8	9
1	0	1	1	1	0	0		9	0
1	0	1	1	1	0	1		9	1
1	0	1	1	1	1	0		9	2
1	0	1	1	1	1	1		9	3
1	1	0	0	0	0	0		9	4
1	1	0	0	0	0	1		9	5
1	1	0	0	0	1	0		9	6
1	1	0	0	0	1	1		9	7
1	1	0	0	1	0	0		9	8
1	1	0	0	1	0	1		9	9
1	1	0	0	1	1	0	1	0	0

LES 4 OPERATIONS

Les hipopotamusiens utilisent, comme les terriens, des opérations pour résoudre leurs problèmes.

L'ADDITION(1)

Problème : Je vais au mégajouet. J'achète une tite voitulala à 1111 hiporo et un sachet de billopo à 10100 hiporo.
Combien vais-je dépenser ?

Réponse : en base 2 en base 10

```
  1111    --->     15
+ 10100   --->   + 20
 100011   --->     35
```

Je vais dépenser 100011 hiporo.

LA SOUSTRACTION

Problème : J'ai 10110 hiporo. J'achète à la hipopoboulangerie un croissantpopo à 1101 hiporo.
Combien me reste-t-il après mes achats ?

Réponse : en base 2 en base 10

```
 10110   --->     22
- 1101   --->   - 13
  1001   --->      9
```

Il me reste 1001 hiporo.

LA MULTIPLICATION

Problème : Xeud achète 111 antennes à 10 hiporo l'unité.
Combien devra-t-il payer ?

Réponse : en base 2 en base 10

```
   111   --->      7
 x  10   --->    x 2
   000
  111
  1110   --->     14
```

Xeud devra payer 1110 hiporo.

LA DIVISION

Problème : Un hipopotamusien a 1001000 billopos. Il veut les partager en 110 paquets. Combien de billopos va-t-il mettre dans chaque paquet ?

Réponse : en base 2 — en base 10

```
1  001000 | 110                72 : 6 = 12
-  110    |-----------
  ----------    1 1 0 0
       0 0 1|1 0
-    110    |
   ----------
     0 0 0 0
-    0000
    ---------
          0|0 0 0 0
-    00000 |
           |---------
           0
```

Il mettra 1100 billopos dans chaque paquet.

BASE 2 / BASE 10

DE LA BASE 2 A LA BASE 10 :

$\overline{1011001}^2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$
= 1x2x2x2x2x2x2 + 0x2x2x2x2x2 + 1x2x2x2x2 + 1x2x2x2 + 0x2x2 + 0x2 + 1
= 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1
= 89

1011001 en base 2 correspond à 89 en base 10

DE LA BASE 10 A LA BASE 2 :

89 $= 8 \times 10 + 9$
$= \overline{1000 \times 1010 + 1001}^2$
$= \overline{1010000 + 1001}^2$
$= \overline{1011001}^2$

DECOMPOSITION DIADIQUE

$\overline{0{,}1011}^{2} = 1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2\times2}+1\times\frac{1}{2\times2\times2}+1\times\frac{1}{2\times2\times2\times2}$

$= 1\times\frac{1}{2}+0+1\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{16}$

$= 0{,}5+0{,}125+0{,}0625$

$= 0{,}6875$

0,1011 en base 2 correspond à 0,6875 en base 10

LES AUTRES BASES / PASSAGE D'UNE BASE A UNE AUTRE

COMPTER EN BASE 3(2)

Et si nous avions 3 doigts, comment compterions-nous ?
Les nombres s'écriraient alors avec des 0, 1 et 2.

$\overline{2102}^{3} = 2\times3^3+1\times3^2+0\times3^1+2$

$= 2\times3\times3\times3+1\times3\times3+0\times3+2$

$= 54+9+0+2$

$= 65$

Donc 2102 en base 3 correspond à 65 en base 10.

PASSER DE LA BASE 2 A LA BASE 3

Et si un hipopotamusien qui compte avec deux doigts rencontrait un ratatuliste qui compte avec trois doigts ?

$\overline{201}^{3} = 2\times3^2+0\times3^1+1$

$= 2\times3\times3+0\times3+1$

$= \overline{10\times11\times11+1}^{2}$

$= \overline{110\times11+1}^{2}$

$= \overline{10010+1}^{2}$

$= \overline{10011}^{2}$

Donc 201 en base 3 correspond à 10011 en base 2.

A QUOI SERT LA BASE 2 ?

On peut trouver plusieurs applications de la base 2 :

➔ La plus archaïque des utilisations : Les habitants du détroit de Torres, entre Australie et Nouvelle-Guinée, utilisent une numération nommée urapun-okosa, rythmée par l'alternance « un »-« deux » :

1 : urapun
2 : okosa
3 : okosa-urapun
4 : okosa-okosa
5 : okosa-okosa-urapun
6 : okosa-okosa-okosa

➔ La plus moderne des utilisations : L'utilisation du binaire dans le codage des nombres qui donne aux ordinateurs leur extraordinaire puissance calculatoire. Les suites de « 0 » et de « 1 », interprétées comme des suites de « oui » et de « non », deviennent ainsi aisément codifiables à l'aide de dispositifs physiques simples, fondés sur la propagation électrique. Le passage du courant exprime le « 1 », son interruption le « 0 ». La vitesse de propagation est telle que le codage de nombres extrêmement longs se fait en des temps extrêmement courts. Ainsi fonctionnent les ordinateurs.

Le premier propagandiste de cette numération est le savant allemand LEIBNIZ (1703).
(3)

Notes d'édition
(1) Il faut comprendre ici (comme pour les autres opérations décrites) que le système de retenues auxquelles nous sommes habitués s'applique encore, mais c'est lorsqu'on fait « 1+1 » qu'on pose « 0 » et on retient « 1 ». Car ici 1+1=10.
(2) Si on fait une addition en base 3, quand on fait « 2+1 », on pose « 0 » et on retient « 1 ».
(3) Il faut remarquer que si on décide de compter en base 11, 12, voire 16, il manque des symboles pour désigner 10 (en base 11 car c'est 11 qui se représente par 10), 10 et 11 en base 12. Pour la base 16, Boby Lapointe (1922-1972) propose de désigner les 16 « chiffres » par
HO qui correspond à 0 dans le système usuel (base 10)
HA qui correspond à 1
HE qui correspond à 2
HI qui correspond à 3
BO qui correspond à 4
BA qui correspond à 5
BE qui correspond à 6
BI qui correspond à 7
KO qui correspond à 8
KA qui correspond à 9
KE qui correspond à 10
KI qui correspond à 11
DO qui correspond à 12
DA qui correspond à 13
DE qui correspond à 14
DI qui correspond à 15
Ainsi, dans le système bibi-binaire de Boby Lapointe, le nombre 2084 s'écrit : BI HE BO (sauf erreur)