Les coloriages du plan

Le sujet de recherche

Comment colorier un plan (une feuille de dimension infinie) en respectant la condition suivante : si deux points sont distants de 1 unité, ils doivent être de couleurs différentes.

Quelle est le nombre de couleurs minimum pour colorier tout le plan en remplissant cette unique condition ?

Travail réalisé par :

François GERMAIN (1°S au Lycée Pierre Paul Riquet)

Julien RODRIGUEZ, Alexandre NOGUES
(T S au Lycée Ozenne)

2004

I) Première approche

Prenons un point A_1 du plan. Traçons le cercle $\mathscr{C}_1$ de rayon 1 autour de ce cercle représentant tous les points du plan devant être de couleur différente à A_1. Prenons un point A_2 sur ce cercle et traçons le cercle $\mathscr{C}_2$ de rayon 1 autour de A_2. On note A_3 et A_4 les points d'intersection entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ puis on trace $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ … et ainsi de suite. On obtient la figure :

Trois couleurs sont nécessaires pour colorier les intersections A_n en respectant la condition mais on obtient des points séparés et non des surfaces. On notera malgré tout la présence de triangles équilatéraux entre les points de même couleur.

On a déjà prouvé qu'il faut au moins trois couleurs.

II) Pavages

Il nous faut donc remplir des surfaces. Pour faciliter le coloriage il serait préférable de trouver des coloriages sur des surfaces finies reproductibles à l'infini pour pouvoir remplir un plan soit une surface infinie. On va donc rechercher des pavages de surfaces finies avec le moins possible de couleurs qui répondent à la condition sur la surface finie mais aussi dans le plan infini : les pavages du plan.

Nous avons exploré essentiellement les pavages réguliers.

III) Losanges, Carrés

1) Losanges composés de triangles équilatéraux : 9 couleurs

On prend des losanges composés de losanges de deux triangles équilatéraux de côté a.
On pave sur le modèle suivant :

Par des translations on obtient le pavage suivant :

Il est nécessaire de trouver les valeurs de a pour lesquelles ce pavage répond à la condition initiale.

- la distance minimale entre deux losanges de même couleur est de $2a$. Elle doit toujours être supérieure ou égale à 1. Il est préférable d'éviter le cas de l'égalité qui poserait des problèmes de frontières
- la distance maximale entre deux points d'un même losange est de $a\sqrt{3}$. Elle doit toujours être inférieure ou égale à 1. Il est préférable d'éviter le cas de l'égalité pour le problème des frontières.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Il faut donc } 2a > 1, \quad \text{c'est à dire } a > 0.5 \\ \text{et } a\sqrt{3} < 1, \ \text{c'est à dire } a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right\} \text{ il faut donc que } 0.5 < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$$

Ce pavage fonctionne avec des losanges dont les côtés ont pour longueur une valeur appartenant à l'intervalle [0,5 ; $\frac{1}{\sqrt{3}}$].

2) Carrés : 8 couleurs

On prend des carrés de côté *a* avec lesquels on fabrique le motif de pavage suivant:

On obtient le pavage suivant :

On doit trouver les valeurs de *a* telles que le pavage réponde à la condition initiale.

- la distance minimale entre deux carrés de même couleur est de $a\sqrt{2}$. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
- La distance maximale entre deux points d'un même carré est de $a\sqrt{2}$. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

$$\left.\begin{array}{l} \text{On veut donc avoir } a\sqrt{2} \le 1, \quad \text{c'est à dire } a \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{et } a\sqrt{2} \ge 1, \text{ c'est à dire } a \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \text{ il faut donc prendre } a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

On a une seule valeur de *a*. Cela signifie que nous devons régler un problème de frontières ; en effet, certains points situés sur les côtés des carrés sont de couleur indéterminée par rapport aux carrés adjacents. Il est important de définir leur couleur, de préférence par une règle que l'on peut répéter sur tout le plan.

On décide donc que le point inférieur droit de chaque carré et de la même couleur que ce carré ainsi que les deux côtés adjacents à ce point.

IV) Triangles, Hexagones, Etoiles

1) Etoiles

J'ai imaginé un modèle de pavage en forme d'étoile à 6 branches. Cette forme se retrouvait en fait sur la première figure inscrite dans chaque cercle. Mais l'étoile ne pouvant servir à paver le plan, je dus abandonner le modèle.

2) Triangles équilatéraux : 8 couleurs

On prend des triangles équilatéraux de côté *a*.

On pave ensuite le plan :

On doit trouver les valeurs de a telles que le pavage réponde à la condition initiale.

- la distance minimale entre deux triangles de même couleur est de a. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
- La distance maximale entre deux points d'un même triangle est de a. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

Puisqu'il faut $a \geq 1$ et $a \leq 1$ alors **$a = 1$**

On a une seule valeur de a. Nous avons donc de nouveau le problème des frontières. On décide donc que chaque sommet est de la couleur du triangle « à l'envers » qui est directement au-dessus de lui, et que chaque côté appartient au triangle « à l'endroit » qui lui est adjacent.

3) hexagones composés de six triangles équilatéraux

On prend des hexagones découpés en six triangles équilatéraux de côté a :

On doit trouver les valeurs de a telles que le pavage réponde à la condition initiale.

- la distance minimale entre deux triangles de même couleur est de $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
- La distance maximale entre deux points d'un même triangle est de a. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

Il faut donc $\frac{a\sqrt{3}}{2} \geq 1$ c'est à dire $a \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, et aussi $a \leq 1$.

Or $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, donc a n'existe pas

Le pavage ne peut pas convenir .

4) Hexagones : 7 couleurs

On utilise le motif suivant, formé de 7 hexagones de côté a avec lequel on pave le plan.

On doit alors trouver les valeurs de a pour lesquelles le pavage répond à la condition initiale :

- la distance minimale entre deux hexagones de même couleur doit toujours supérieure ou égale à 1.

- La distance maximale entre deux points d'un même hexagone est de $2a$. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

- Commençons par trouver la plus petite distance entre deux hexagones de la même couleur : on admet pour cela que cette distance est la mesure b du segment rouge sur la figure ci–contre.

- Pour calculer *b,* on construit B, projeté orthogonal du sommet A sur le côté (CD) (voir dessin) et on note c = AB.

Pour des raisons de symétries, il est clair que la droite (AB) est perpendiculaire à la diagonale (GH), qu'elle passe par le sommet E et qu'on a AB = 3 BE.

Comme [BE] est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a, BE = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ et donc $c = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle ABD donne alors :

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{27a}{4}}$$
$$= a\sqrt{7}$$

$$\boxed{\boldsymbol{b = a\sqrt{7}}}$$

En résumé, la condition initiale se traduit par $b > 1$ et $2a < 1$

C'est à dire $a > \frac{1}{\sqrt{7}}$ et $a < \frac{1}{2}$

Le pavage conviendra donc si on choisit $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{7}} < a < \frac{1}{2}}$ (avec $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0{,}38$)

Et dans ce cas, on n'aura pas deux points distants d'une unité de la même couleur, que ce soit dans un même hexagone ou dans deux hexagones voisins (et à fortiori plus éloignés).

V) Superposition de disques et de carrés : 6 ou 8 couleurs ?

On prend des disques de diamètre *a* qu'on superpose sur des carrés de côtés *a* pavés selon le modèle précédemment vu (sans les couleurs).

On utilise sur le motif suivant :

On pave ensuite le plan :

On doit trouver les valeurs de *a* telles que le pavage réponde à la condition initiale.

1. la distance minimale entre deux cercles de même couleur est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
2. La distance maximale entre deux points d'un même cercle est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1.
3. la distance minimale entre deux carrés de même couleur est de $a\sqrt{0,5}$. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
4. La distance maximale entre deux points d'un même carré est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

Les conditions 1. et 2. se traduisent par $a \leq 1$ et $a \geq 1$: donc $a = 1$
La condition 3. se traduit alors par $a\sqrt{0,5} \geq 1$ c'est à dire $\sqrt{0,5} \geq 1$ ce qui est impossible.

Le pavage avec ce motif de 6 couleurs ne convient pas.

En revanche si on prend le motif suivant, formé de huit couleurs:

On pave le plan sur le même modèle précédent :

On doit trouver les valeurs de *a* telles que le pavage réponde à la condition initiale.

- La distance minimale entre deux cercles de même couleur est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
- La distance maximale entre deux points d'un même cercle est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1
- La distance minimale entre deux carrés de même couleur est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours supérieure ou égale à 1.
- La distance maximale entre deux points d'un même carré est de *a*. Il faut que cette distance soit toujours inférieure ou égale à 1

Donc on a : $a = 1$

a n'a qu'une seule valeur possible on devra donc se poser le problème des frontières.

Ce pavage fonctionne à 8 couleurs avec *a* = 1.

VI) Conclusion

La meilleure solution que nous ayons trouvée est celle des 7 couleurs, obtenue avec des hexagones.

Mais nous avons essentiellement étudié des pavages réguliers et peut-être certains pavages irréguliers pourraient convenir avec un nombre moindre de couleurs.