Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Du chemin le plus court au chemin minimal

Année 2013 - 2014

Elèves Chercheurs : Anas KABCHI, Clément ROUX, Julia MOLYN, Stéphanie BRONZINO, Classe de 6°7

Professeur : Nelly SIMOND

Etablissement : Collège Pierre de Coubertin 83 340 Le Luc (Var)

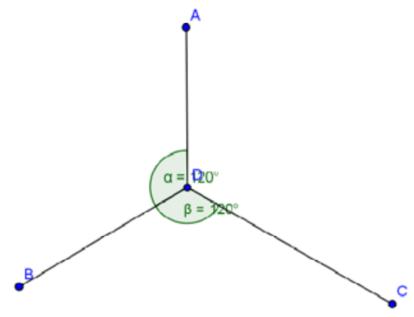
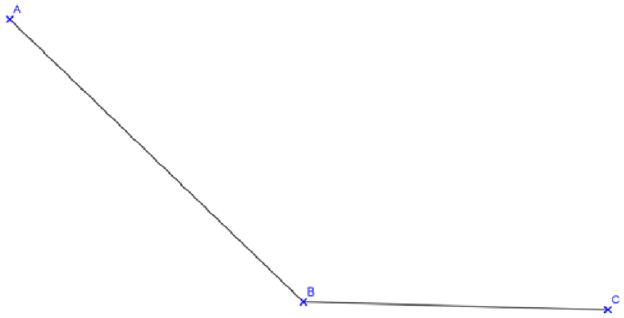
Chercheur : Bernard ROUSSELET, Université de Nice-Sophia-Antipolis

<u>Le problème :</u>

Nous avons trois villages que nous voulons connecter à l'aide d'un réseau routier.
Notre contrainte est dans la minimisation de ce réseau routier. Pour faire des économies, nous voulons utiliser le moins de goudron possible.

<u>Résultats :</u>
Nous avons trouvé que lorsque les villes formaient en angle inférieur à 120°, il fallait placer un rond-point commun aux trois routes partant des villes. Chaque route arrivant à ce rond-point, forme un angle de 120° avec l'autre pour que le chemin soit minimal.
Si les villes forment un angle supérieur à 120°, il faut construire deux routes reliant les villes en choisissant les trajets les plus courts.

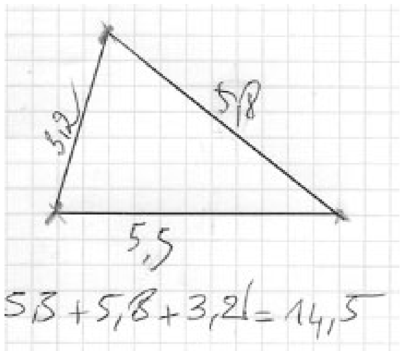
Illustrations :

Cas où les angles sont inférieurs à 120 °	Cas où les angles sont supérieurs à 120°
	

1ers essais :

Nous avons tout d'abord pensé à se demander comment nous allions représenter cela. Nous avons alors choisi de remplacer les villes par des points et nous avons essayé plusieurs tentatives.

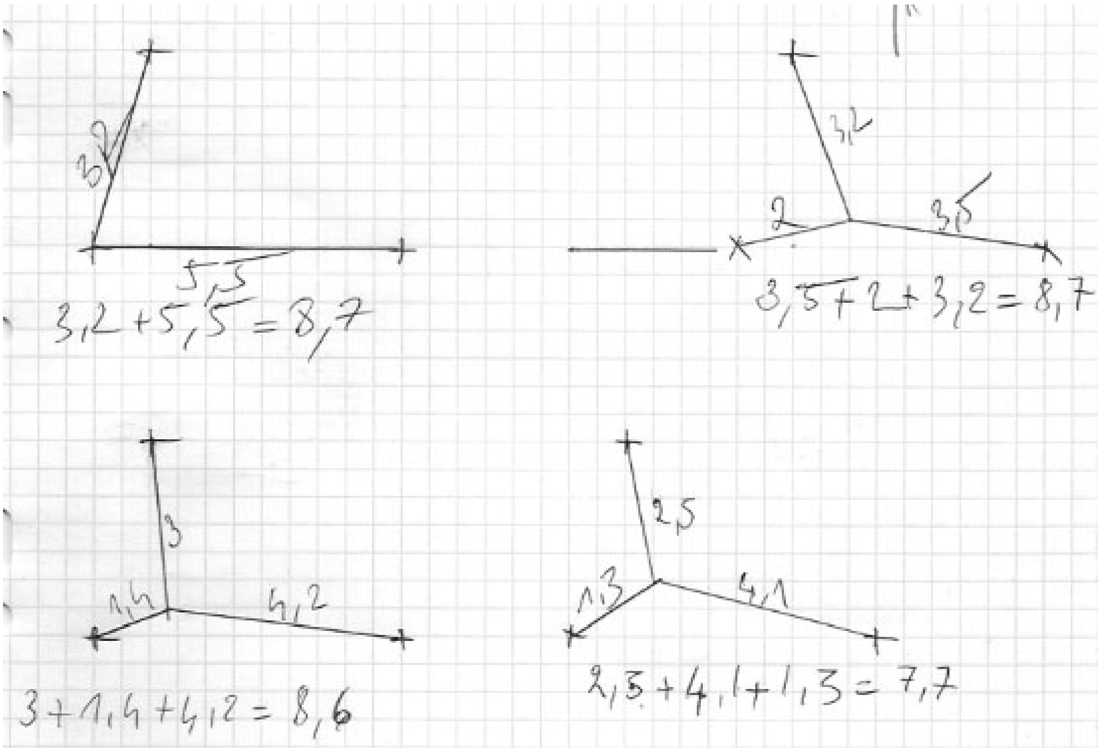
Nous sommes partis de la chose suivante : le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. Ainsi nous avons essayé des configurations comme celle-ci :



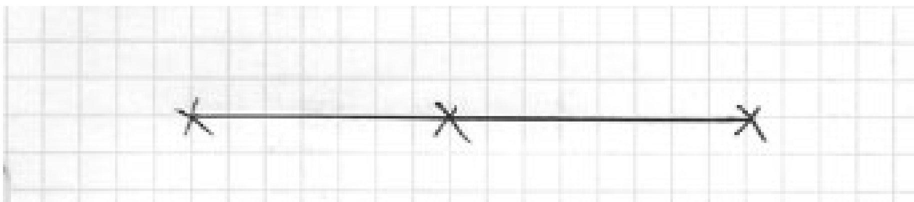
Nous avons vite compris que comparer nos réponses ne donnait rien de très probant lorsque les villes n'étaient pas placées de la même manière sur les dessins.

Nous nous sommes alors servis des carreaux pour faire plusieurs essais sur des configurations identiques afin que la comparaison ait un sens.

Puis, nous nous sommes rendu compte que connecter ne voulait pas forcément dire qu'il fallait qu'une route parte de chaque ville pour atteindre chaque ville. Ce n'est pas le trajet de l'automobiliste qui doit être minimum mais la quantité de goudron donc le réseau routier qui doit l'être. Cela permet de faire des économies de goudron, moins polluer avec lui.
On doit pouvoir, en partant d'une ville, rejoindre n'importe laquelle des deux autres.
Nous avons alors essayé différents tracés sur le même positionnement pour les villes. Nous avons mesuré les trajets puis nous les avons comparés.



Nous nous sommes aussi rendu compte que si les trois villes étaient alignées, tracer une route reliant les deux plus éloignées était le plus économique.



Cela nous prenait beaucoup de temps de se mettre d’accord sur la position des villes et de refaire le dessin à chaque fois, on a donc demandé à notre professeur de nous photocopier des feuilles pour faire plusieurs essais dans les mêmes conditions.
Nous avons placé trois points dans différentes positions.

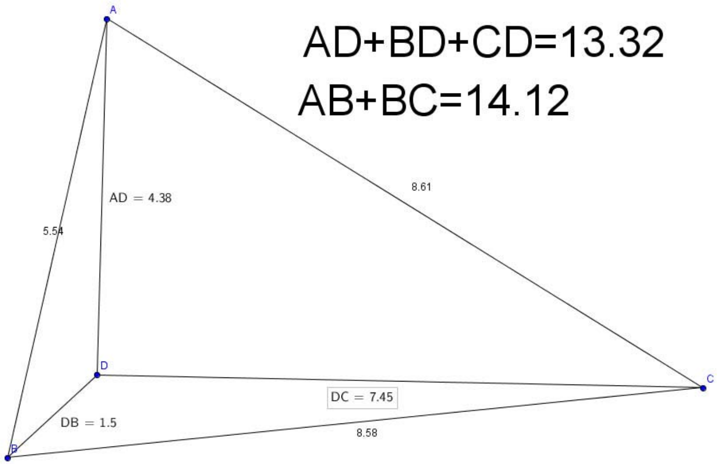
Avec ces essais, nous nous sommes rendus compte qu’il fallait placer un « rond-point » entre les trois villes. Mais comment le placer ?

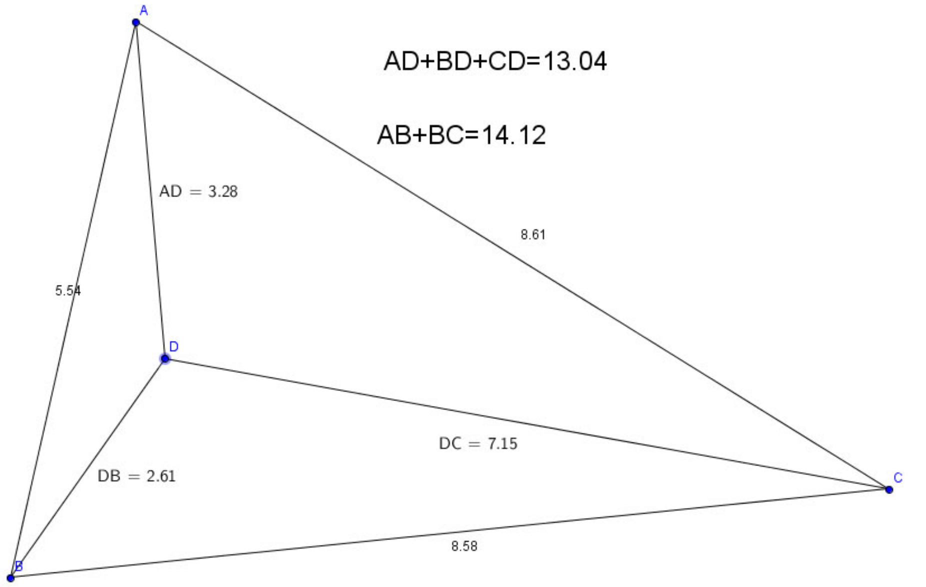
Dans un deuxième temps, notre professeure, nous a montré comment utiliser le logiciel Géogébra. Grâce à ce logiciel de géométrie dynamique, nous avons pu faire des tests plus précis et essayer différents placements pour les villes.

Nous prenions les deux plus petites distances entre les points, nous faisions afficher leur somme. Nous créions notre rond-point, puis les trois routes partant de ce rond-point et allant à chaque ville. Nous faisions afficher la somme de ces trois distances. Cela a confirmé ce que nous avions remarqué sur le papier. Assez facilement, la seconde distance était la plus petite.

En bougeant de place le rond-point, on a essayé de trouver, la place pour laquelle, la distance était la plus petite.

Tests avec Géogébra :

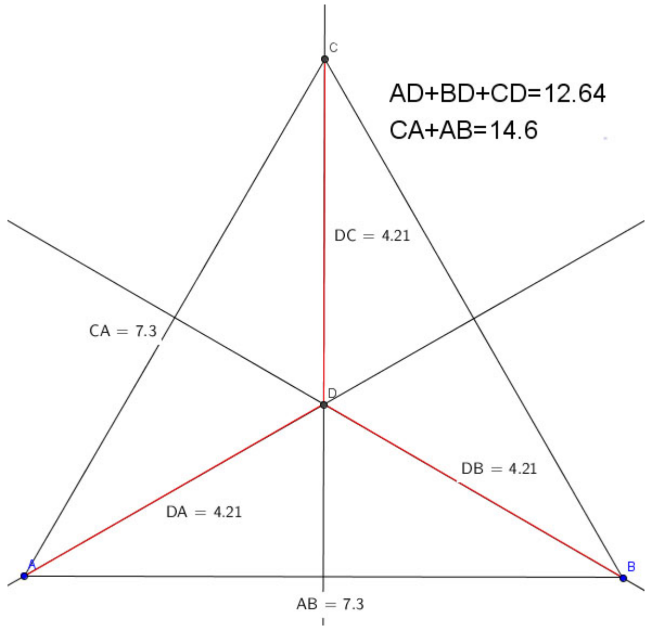




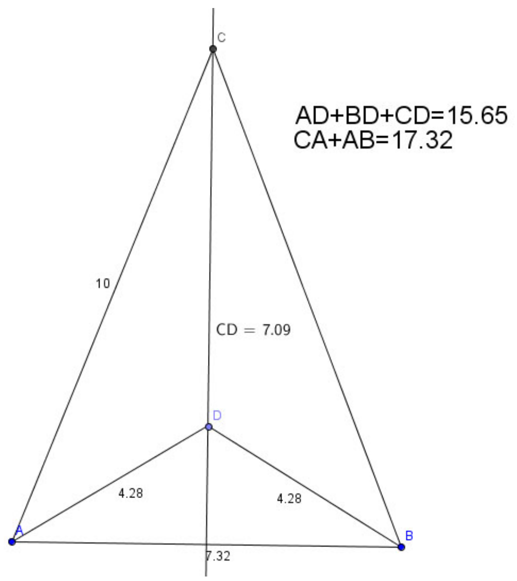
Nous sommes partis sur cette configuration, puis nous avons fait mesurer et calculer la longueur totale des segments représentant les routes.
Ensuite nous faisions varier la place du « rond-point » jusqu'à ce que cette longueur totale soit la plus petite possible.
Dans chaque cas, nous retombions sur ce résultat : il faut placer ce rond-point, mais où ?
Il ne semblait pas être à une place remarquable.

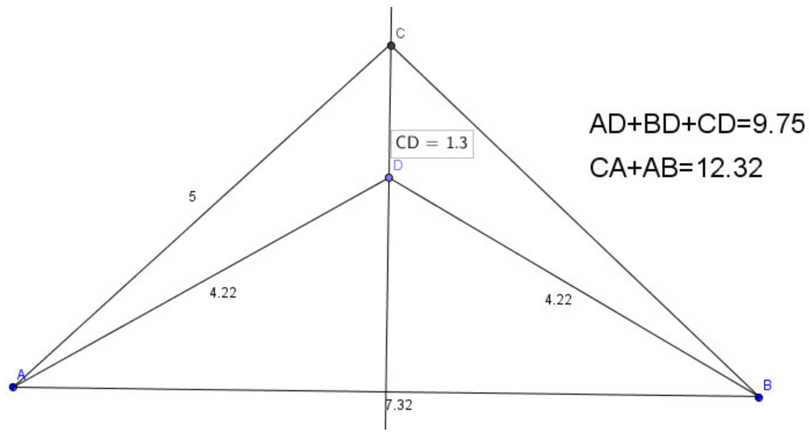
Lors de la visite de notre chercheur, nous lui avons montré ce que nous avions obtenu. Il nous a proposé alors d'essayer sur un exemple de triangle particulier, comme le triangle équilatéral, isocèle…
Il nous a aussi fait remarquer que nos points étaient toujours placés de la même façon et que lorsque nous aurions fait le cas des triangles équilatéraux et isocèles, nous pourrions regarder un cas non montré encore, avec un angle très obtus.

Nous avons alors regardé des triangles particuliers formés par ces trois villes. Nous avons essayé le triangle équilatéral et nous nous sommes rendu compte que ce « rond-point » se situait à l'intersection des médiatrices. Nous les avions vues quelques temps avant en cours et nous les avons reconnues presque tout de suite :



Nous avons essayé avec le triangle isocèle et nous nous sommes rendu compte que ce rond-point se situait sur la médiatrice issue du sommet principal. En revanche selon le triangle, sa position se trouvait modifiée.

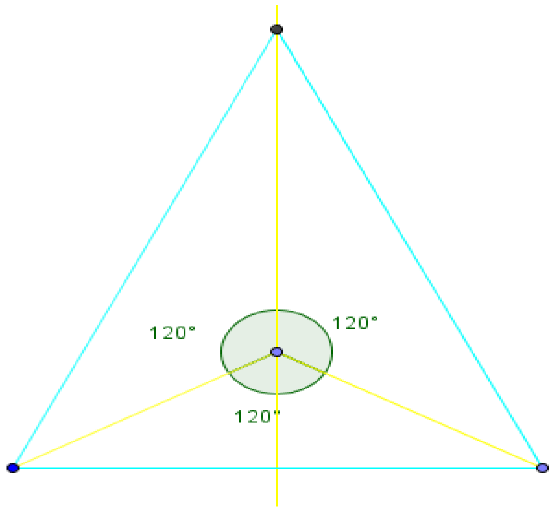




Malgré tout, il se situait toujours sur l’axe de symétrie du triangle. Nous nous sommes alors demandé si c’était toujours le cas. Nous avons repris nos premières figures mais celles-ci n’avaient pas d’axe de symétrie. Nous avons alors pensé aux médiatrices et là non plus cela n’a pas fonctionné.

Nous nous sommes rendu compte que quand même dans ces cas, la position du rond-point, partageait en secteur identiques. Notre professeure nous a dit que cela pouvait s’appeler angle et qu’on pouvait les mesurer. Elle nous a montré l’icône qui permet de le faire.

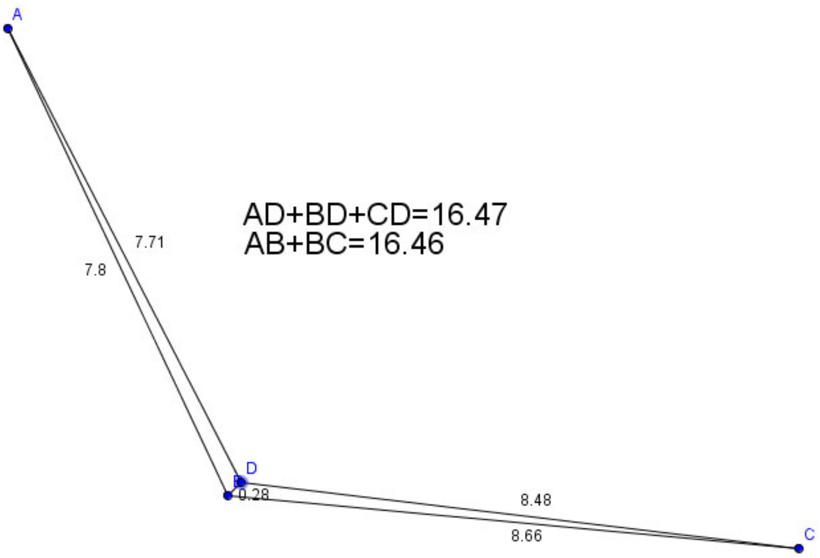
Nous avons mesuré les angles pour les triangles particuliers et nous avons remarqué que pour le triangle équilatéral on trouvait 120° pour chaque.
Nous avons donc essayé de voir sur le triangle isocèle et là aussi, cela a fonctionné.



En reprenant nos premiers exemples, en faisant afficher la mesure des angles et en bougeant le rond-point de façon à ce que les trois angles affichent 120°, on s'est rendu compte que c'était difficile… et que même pour 117°, 118°, 119°, 121°, cela fonctionnait aussi.
La professeure nous a montré qu'on pouvait avoir une meilleure précision et nous en sommes revenus à 120°…

Cela nous a semblé logique étant donné que le tour complet représente 360° et que si on le partage en trois on trouve 120°.

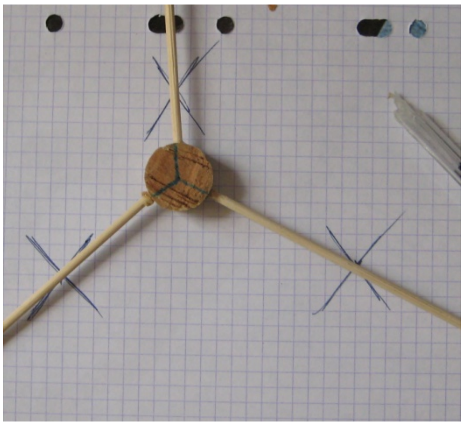
Nous avons alors étudié le triangle que nous avait donné le chercheur. Nous avons essayé de placer notre rond-point en utilisant les mesures d'angles comme précédemment mais cela ne fonctionnait pas. Comme nous ne parvenions à rien, notre professeure nous a montré que nous pouvions construire un angle de mesure donnée. Nous avons alors construit un gabarit à l'aide de Géogébra et nous avons placé ce gabarit sur notre situation. Nous nous sommes rendu compte qu'en fait, un des angles du triangle était supérieur à 120°.

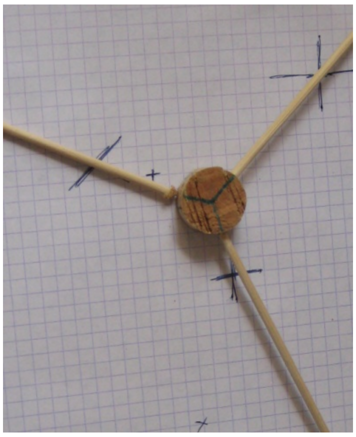


A ce moment-là, la construction la plus courte était de relier les deux villes les plus proches.

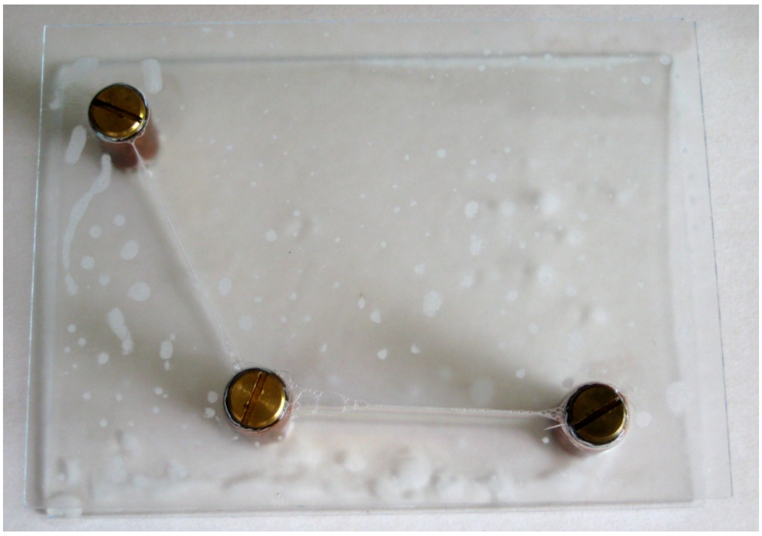
Sur ordinateur, on peut placer à l'aide du gabarit sur n'importe quelle situation mais dans la réalité comment faire. Nous étions en train d'envisager de faire un gabarit quand nous avons assisté à une conférence où la chercheuse nous a présenté la minimisation d'un trajet à l'aide de bulles de savon.

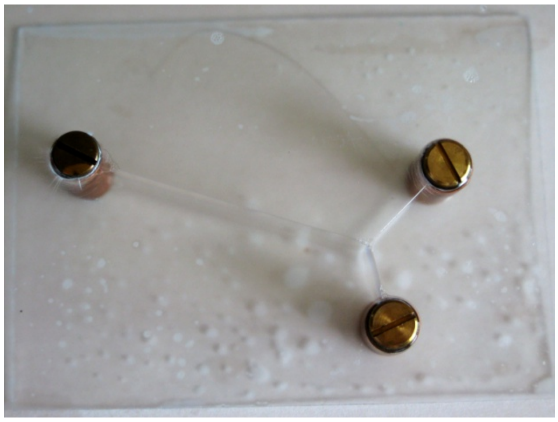
Nous avons alors fabriqué nos propres plaques afin de présenter cette expérience lors du congrès comme illustration de ce que nous avions trouvé.
Notre professeure nous a appris à utiliser le rapporteur afin que nous le fabriquions.
Voilà ce que cela a donné :





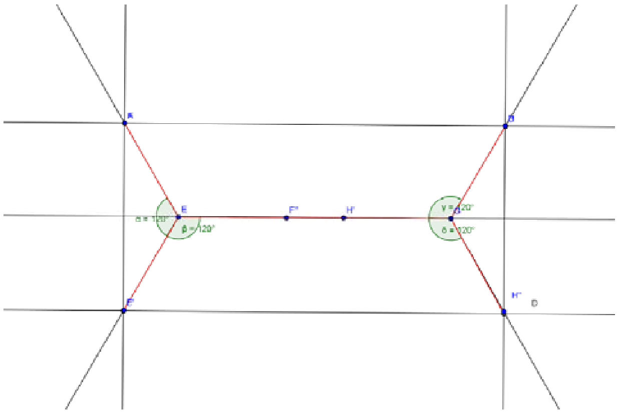
L'angle est supérieur à 120°





(1)

Le chercheur nous a alors demandé de chercher pour quatre points, en commençant par le rectangle. Voilà ce que nous avons fait, malheureusement nous n'avons pas eu le temps d'aller plus loin :



Note d'édition

(1) En conclusion, pour relier trois villes en utilisant le moins de goudron possible, nous avons deux cas :

- si les villes forment un triangle sans angle obtus (plus grand que 90°), il faut tracer les médianes et mettre le rond-point au point d'intersection,
- sinon, il faut relier la ville située au sommet de l'angle obtus aux deux autres.