Le chemin le plus court

Année 2014 - 2015

Elèves de 3è : Victor ALIX, Benoît KACZMARZUK, Yann ARCHAMBAULT, Leonard PAUTET, Cyprien EYRAUD, Raphaël DAMBRUNE, Vincent TREMOLIERE.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline ABRAHAM, université Paris-Sud Orsay.

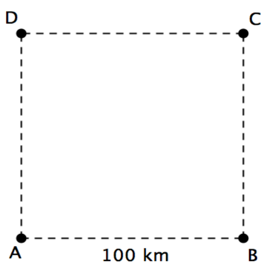
Le sujet

4 villes sont positionnées aux 4 sommets d'un carré de 100 kilomètres de côté.
Le gouvernement veut construire un réseau de routier le plus court possible reliant ces 4 villes.
Il est possible que les villes ne soient pas reliées directement mais en passant par d'autres.
Comment construire ce réseau ?

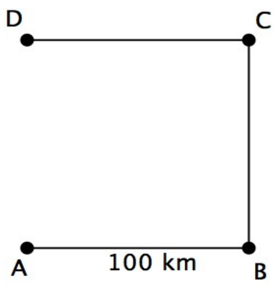
Nos résultats : nous pensons avoir trouvé le chemin le plus court pour relier les sommets d'un carré et ensuite, nous avons étendu le sujet en cherchant un chemin le plus court reliant les sommets d'un triangle équilatéral.

I – Recherche d'un chemin le plus court

Les villes sont représentées par les points *A, B, C* et *D*. On appellera dans toute la suite, L_i la longueur du chemin correspondant à l'idée i.

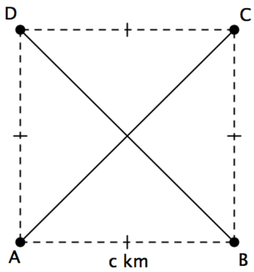


Idée 1 : **suivre le carré** formé par les villes ; il suffit de prendre trois côtés pour toutes les relier.



L_1 = 300 km. Pour un carré de côté c : $L_1 = 3c$ km.

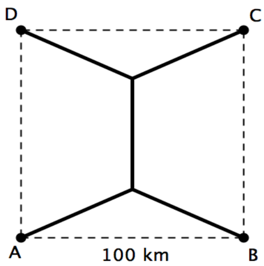
Idée 2 : réseau **en diagonales**.



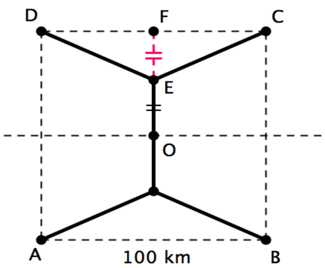
c = 100 km. Notons $DB = x$.
Dans ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $x^2 = AB^2 + DA^2$; les quatre côtés ayant la même longueur, on a $x^2 = 2 \times 100^2$. x étant positif, on a $x = 100\sqrt{2}$.
Dans un carré les diagonales sont de même longueur donc : $L_2 = 200\sqrt{2}\,km < 300\,km$.
Ce chemin, d'environ 282,84 km, est donc meilleur que le premier.

Pour un carré de côté c : $L_2 = 2c\sqrt{2}\,km < 3c\,km$

Idée 3 : on a gardé l'idée de passer par l'**intérieur du carré**.



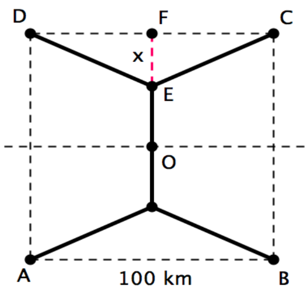
On prend tout d'abord un chemin symétrique par rapport aux médiatrices des côtés du carré.



En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DEF rectangle en F, on obtient : $ED = \sqrt{50^2 + 25^2} = \sqrt{3125}$ *km.*

Donc : $L_3 = 4\sqrt{3125} + 50\,km$ Ce chemin vaut environ 273,61 *km,* il devient donc le meilleur.

Idée 4 : Essayons de faire varier le point E sur $[FO]$, c'est à dire de faire varier la longueur x, pour voir si on obtient un chemin plus court.



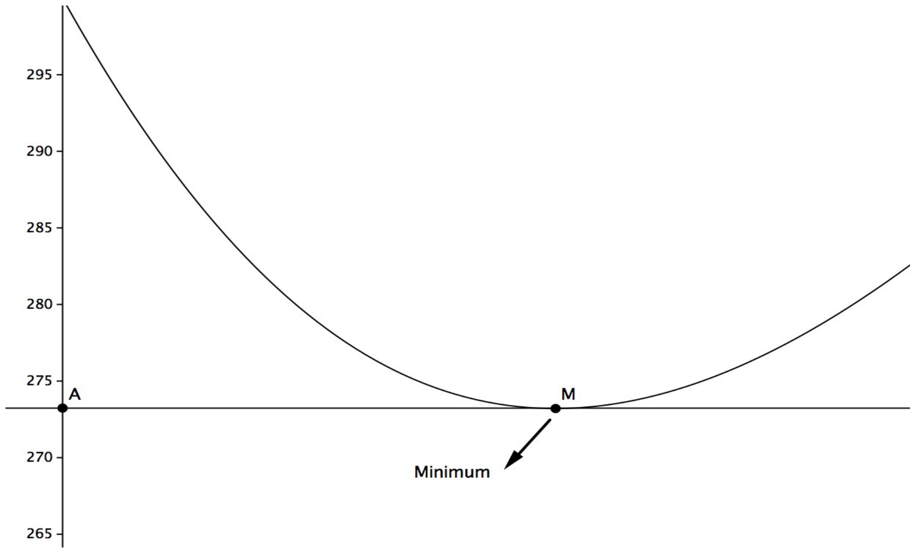
Notons $EF = x$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DEF rectangle en F, on obtient :

$ED=\sqrt{50^2+x^2}$ *km*. On a aussi : $EO=\dfrac{BC}{2}-x=50-x$

Donc : $L_4(x)=(ED\times 2+EO)\times 2=(2\sqrt{50^2+x^2}+50-x)\times 2=4\sqrt{50^2+x^2}+100-2x$

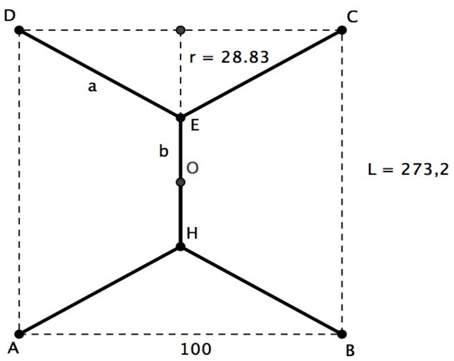
Remarque : pour un carré de côté c, on aurait : $L_4(x)=4\sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+x^2}+c-2x$

Pour trouver la valeur minimale de L_4(x), nous avons tout d'abord pensé à tracer la courbe représentative de la fonction L_4 avec le logiciel de géométrie Géogébra :



Il semble que le chemin soit minimal au point *M*. Cette valeur est très proche de celle du chemin L_3 précédent. On lit : *M* (273,23 ; 28,9), EF serait supérieur à 25 et le chemin correspondant, peut-être meilleur.

Manquant de précision nous avons pensé à calculer ce chemin, toujours avec Géogébra. Nous faisons bouger le point *E* sur [FO] jusqu'à obtenir une valeur de chemin la plus petite possible. Voici le résultat obtenu :



On obtient un chemin d'environ 273,2 km, ce qui paraît être meilleur que L_3.

Pour affiner notre recherche, nous avons fait les calculs avec un tableur.

Recherche du nombre *x* correspondant à un chemin minimum.

26	273,4240449
27	273,2971623
28	**273, 22 47805**
29	**273, 20 55363**
30	**273, 23 80758**
31	273,3210573

x est compris entre 28 et 30.

28,6	273,2069443
28,7	273,2058109
28,8	**273,20 519 92**
28,9	**273,20 510 82**
29	**273,20 55 363**
29,1	273,2064822

x est compris entre 28,8 et 29. Nous retrouvons les résultats trouvés avec Géogébra.

28,84	273,2051004288
28,85	273,2050887269
28,86	**273,2050 82 2237**
28,87	**273,2050 80 9175**
28,88	**273,2050 84 8072**
28,89	273,2050938914

x est donc compris entre 28,86 et 28,88.

28,866	273,2050808164
28,867	**273,205080 7637**
28,868	**273,205080 763**
28,869	**273,205080 8143**
28,87	273,2050809175

x est compris entre 28,867 et 28,869.

28,8673	273,2050807581
28,8674	**273,2050807 572**
28,8675	**273,2050807 569**
28,8676	**273,2050807 571**
28,8677	273,2050807578

x est donc compris entre 28,8674 et 28,8676.

28,86749	273,205080756902
28,8675	**273,2050807568 92**
28,86751	**273,2050807568 88**
28,86752	**273,2050807568 89**
28,86753	273,205080756895

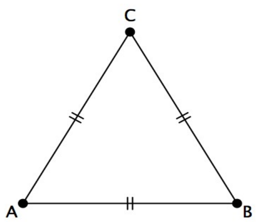
x est donc compris entre 28,8675 et 28,86752.

Nous n'avons pas pu aller plus loin ; nous avons trouvé un chemin meilleur et nous pouvons en donner un encadrement : $273{,}205080756889 < L_4 < 273{,}205080756892$ pour une valeur de x comprise entre 28,8675 et 28,86752. (1)

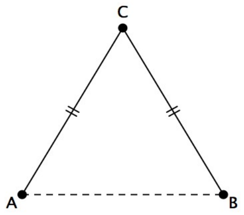
Conclusion : Nous n'avons pas trouvé de configuration qui donne un meilleur chemin que L_4 . Nous avons démontré que c'était le meilleur parmi ceux que nous avons étudiés mais nous ne savons pas s'il en existe un plus court encore.

II – Extension du sujet : le triangle équilatéral

Les villes sont représentées par les points *A, B* et *C*. On prend 100 *km* pour la longueur d'un côté.

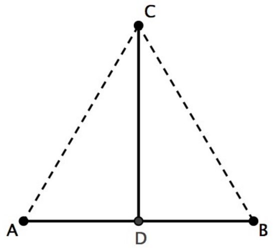


Idée 1 : relier les sommets en suivant **les côtés** du triangle.



$L_1 = 200\,km$

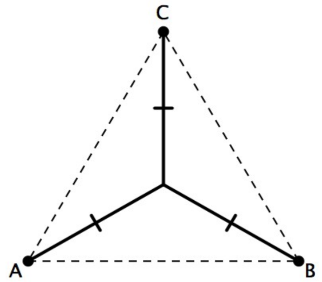
Idée 2 : On garde **un côté** du triangle et on trace **sa médiatrice**.

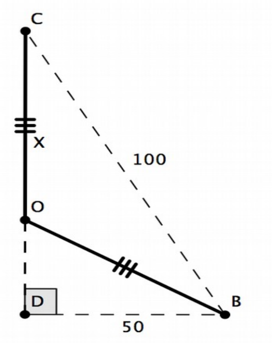


En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle *ACD* rectangle en *D*, on obtient : $CD = \sqrt{100^2 - 50^2} = \sqrt{7500} = 50\sqrt{3}$ *km.*

Donc : $L_2 = 50\sqrt{3} + 100$ *km.* Ce chemin vaut environ 186,6 *km,* il devient donc le meilleur.

Idée 3 : En prenant le **centre de gravité** du triangle.





De par la place du centre de gravité sur la médiane, on a :

$CO = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} \times 50\sqrt{3}$ *km.*

ABC étant équilatéral, on a : *CO = AO = BO.*

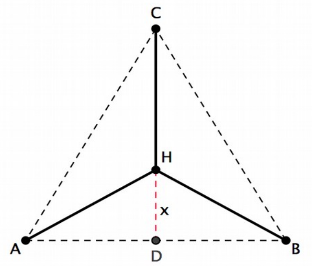
Donc :

$L_3 = 3 \times \frac{2}{3} \times 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ *km.*

Ce chemin vaut environ 173,2050808 *km,* il devient donc le meilleur. Dans ce cas : $OD = CD - CO = 50\sqrt{3} - \frac{2}{3} \times 50\sqrt{3} = \frac{50}{3}\sqrt{3}\,km$

OD fait environ 28,87 *km.*

Idée 4 : On fait varier le point *O* le long de la médiatrice de [*AB*].



En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BDH rectangle en D, on obtient : $HA = HB = \sqrt{50^2 + x^2}$ *km et* $CH = CD - HD = 50\sqrt{3} - x$ *km.*

On a donc : $L_4(x) = 50\sqrt{3} - x + 2\sqrt{2500 + x^2}$ *km.*

Nous avons repris la même méthode de calcul à l'aide du tableur en affinant de plus en plus la valeur donnée à x :

28	173,2 149306
29	173,2 053085
30	173,2 215783
[redacted]	[redacted]
28,8	173,205 14
28,9	173,205 0945
29	173,205 3085
[redacted]	[redacted]
28,86	173,20508 149
28,87	173,20508 084
28,88	173,20508 278
[redacted]	[redacted]
28,864	173,205080 9
De 28,865 à 28,87	173,205080 8
28,871	173,205080 9

Nous avons un encadrement de x : $28{,}864 < x < 28{,}871$
et du chemin : $173{,}2050808 < L_4 < 173{,}2050809$ (2)
Remarque : Si on compare ce chemin avec celui correspondant au centre de gravité, il sont égaux à 7 chiffres après la virgule ; x correspond également au calcul approché de OD de l'idée 3, ce qui nous fait penser que le chemin le plus court est celui correspondant au centre de gravité.

Conclusion : Pour le triangle équilatéral, comme pour le carré, nous avons essayé toutes sortes de configurations mais nous n'avons pas trouvé de chemin plus court que celui passant par le centre de gravité du triangle : L_3. Nous avons démontré que c'était le meilleur parmi ceux que nous avons étudiés mais nous ne savons pas s'il en existe un plus court encore.

Notes d'édition

(1) L’encadrement de L_4 est erroné : en effet il suffit d’observer la valeur du calcul intermédiaire pour 28,86751 qui est légèrement inférieur à la borne inférieure annoncée. De manière générale, même si l’on sait qu’il y a un unique point de minimum, la méthode donnée permet d’avoir un encadrement pour la valeur de x, mais pas pour la valeur de la longueur, pour laquelle on a seulement une borne supérieure. Il faut d’autres arguments pour avoir une preuve d’une borne inférieure, même si on voit bien qu’on s’approche d’une valeur minimale au fur et à mesure que l’encadrement pour x est de plus en plus précis.

(2) Même remarque que précédemment, si on est certain d’avoir un unique point de minimum, on ne peut être sûr que de l’encadrement de x, et d’une borne supérieure sur L_4, mais pas de la borne inférieure.