RECHERCHE DE CHEMIN MINIMAL …

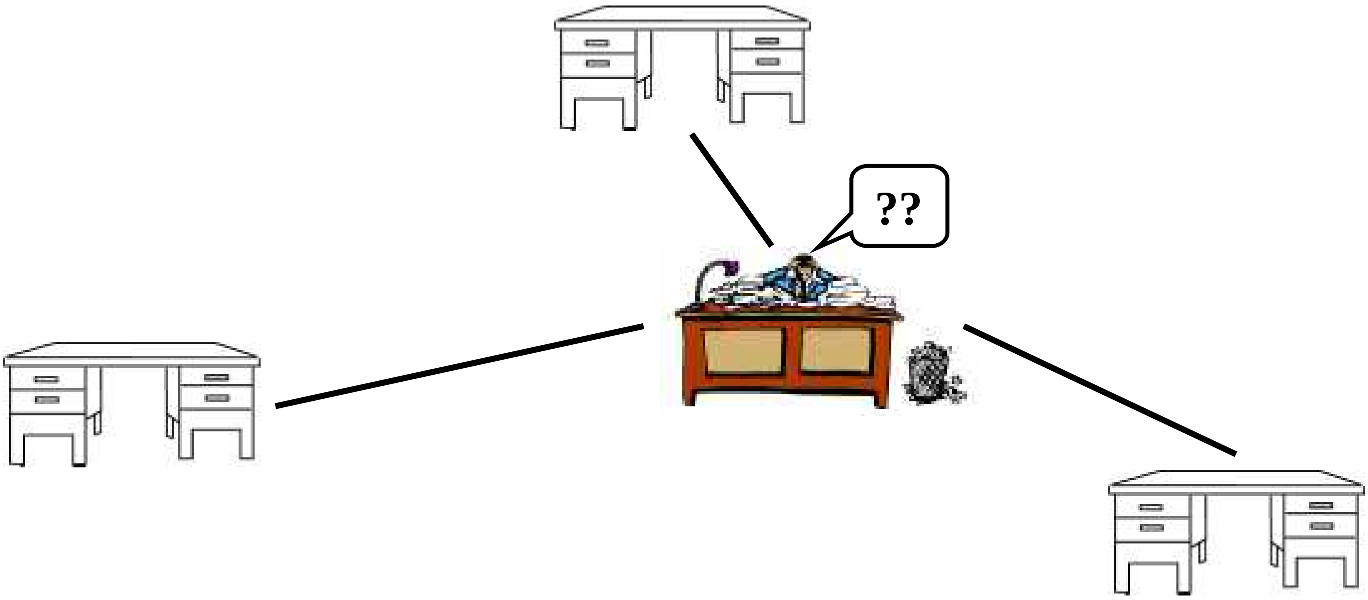
par

Yvon KOWALSKA, Sofiane SEROUTOU et Jérémy VEIRMAN,
élèves de troisième
au collège Adulphe DELEGORGUE de Courcelles lès Lens (Pas de Calais)

2003

Enseignant : Stéphane ROBERT (collège DELEGORGUE)
Chercheur : Valério VASSALLO (université de Lille I)

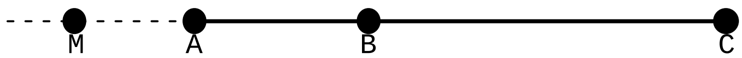
Dans une société, les bureaux, aux positions fixes, de trois employés doivent être reliés à celui de leur supérieur par un réseau informatique. Bien évidemment le patron souhaite que cela soit le plus économique possible et cherche donc l'endroit où placer son bureau et permettant d'utiliser le moins de câble.



Si nous assimilons les bureaux des employés à trois points A, B et C et celui du patron, à un point M, notre problème revient à trouver la position du point M telle que la longueur MA + MB + MC soit minimale.

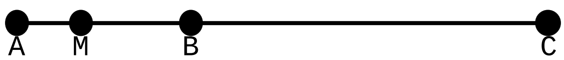
I – Si les bureaux sont alignés

Supposons dans un premier temps que les points A, B et C sont alignés dans cet ordre.
Il est alors clair que pour minimiser MA + MB + MC, il faut que le point M appartienne au segment [AC].
En effet, supposons que $M \in [CA)$ et $M \notin [AC]$:



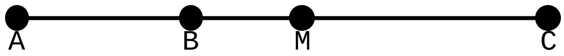
$$MA + MB + MC = MA + MA + AB + MA + AC = 3MA + AB + AC.$$

Par conséquent, $3MA + AB + AC$ est minimal si M = A, c'est à dire si $M \in [AC]$.
Un raisonnement identique nous conduirait au même résultat si $M \in [AC)$ avec $M \notin [AC]$.
Le point solution est donc à chercher parmi les points du segment [AC].
Si $M \in [AB]$: MA + MB + MC = AB + MC = AB + MB + BC.



donc AB + MB + BC est minimal si M = B.
dans ce cas MA + MB + MC = AB + BC = AC.

Si M ∈ [BC] : MA + MB + MC = MA + BC = MB + BA + BC.



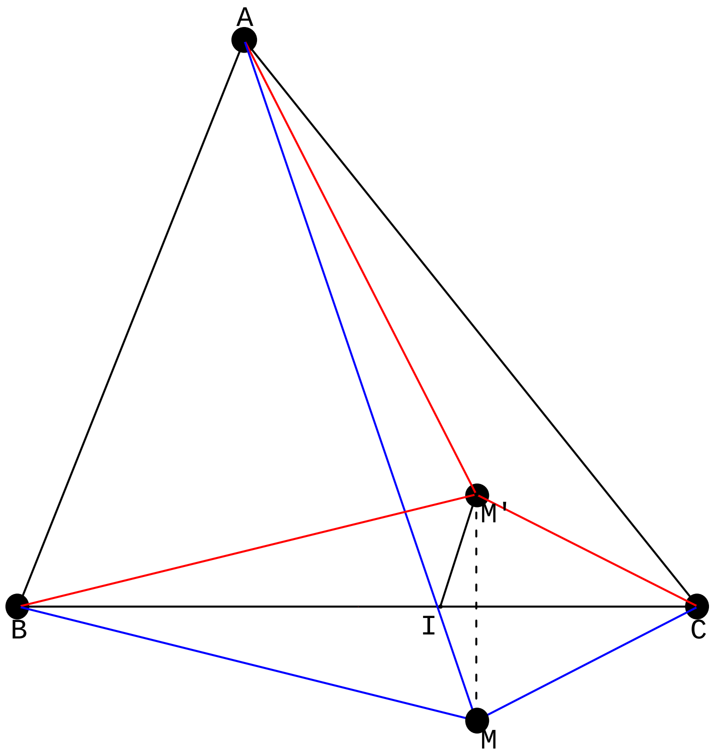
donc MB + BA + BC est minimal si M = B.
dans ce cas MA + MB + MC = AB + BC = AC.

En conclusion, dans le cas où les points A, B et C sont alignés dans cet ordre :
la longueur MA + MB + MC est minimale si les points M et B sont confondus.
Pour notre problème de bureaux, cela serait quelque peu gênant …

II – <u>Limitation de la zone de recherche</u>

Revenons maintenant à l'étude du cas général, c'est à dire lorsque les points A, B et C occupent trois positions quelconques non alignées.

Supposons le point M extérieur au triangle ABC et occupant une position telle qu'indiquée par la figure ci-contre.
Notons M' le symétrique de M par rapport à la droite (BC).

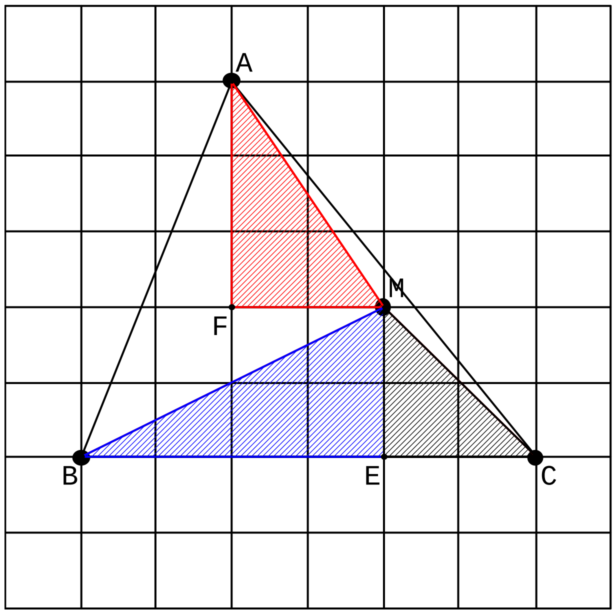


Par cette symétrie, les points B et C sont invariants et d'autre part, la symétrie axiale conservant les longueurs, nous avonc M'B = MB et M'C = MC.
Par conséquent, pour comparer MA + MB + MC et M'A + M'B + M'C, il suffit de comparer MA et M'A.
Utilisons pour cela les relations d'inégalité triangulaire : dans un triangle, la longueur de chaque côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres et plus grande que leur différence.
Ainsi dans le triangle AIM' : M'A < M'I + IA.
Mais M'I + IA = MI + IA = MA (toujours par conservation des longueurs lors d'une symétrie axiale).
Donc M'A < MA c'est à dire que M'A + M'B + M'C < MA + MB + MC.
Finalement pour toute position du point extérieure au triangle ABC, il existe une position intérieure qui rende la distance considérée plus petite. La solution est donc à chercher à l'intérieur du triangle ABC.

III – <u>Quadrillons …</u>

Dans cette situation, au vu du peu de moyens de calcul de longueurs dont nous disposions, nous avons décidé de construire un quadrillage de manière à ce que les points A, B et C soient situés à des nœuds du quadrillage, faisant ainsi apparaître des triangles rectangles et permettant l'emploi du théorème de Pythagore.

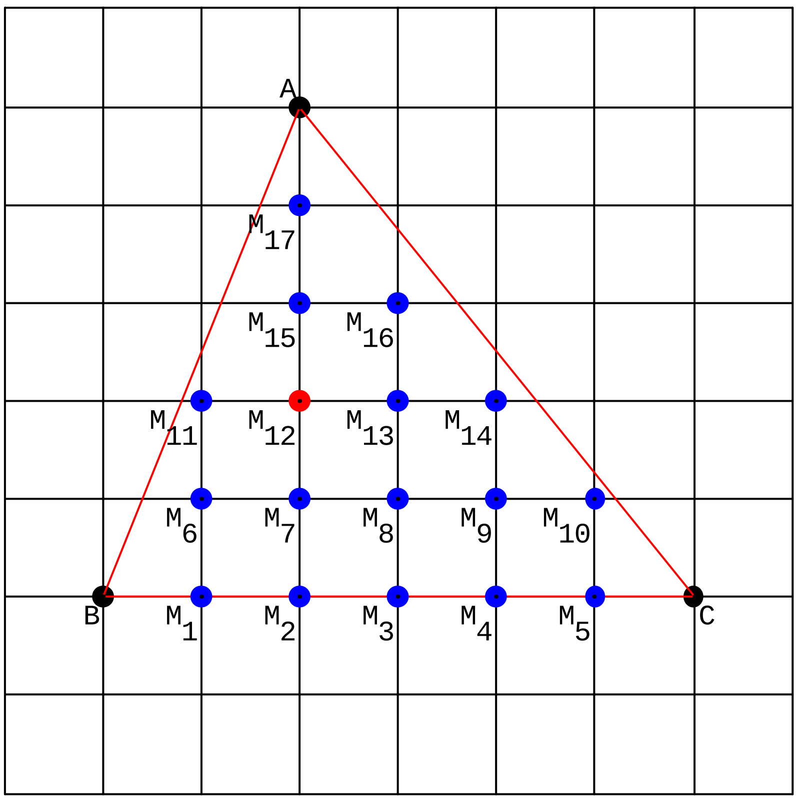
Pour tous les calculs qui suivront, l'unité de longueur sera le côté de carreau.
Dans les triangles rectangles MEB, MEC et MFA, utilisons le théorème de Pythagore :



$$MB^2 = ME^2 + EB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \quad \text{donc} \quad MB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$MC^2 = ME^2 + EC^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \quad \text{donc} \quad MC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$MA^2 = MF^2 + FA^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \quad \text{donc} \quad MA = \sqrt{13}$$

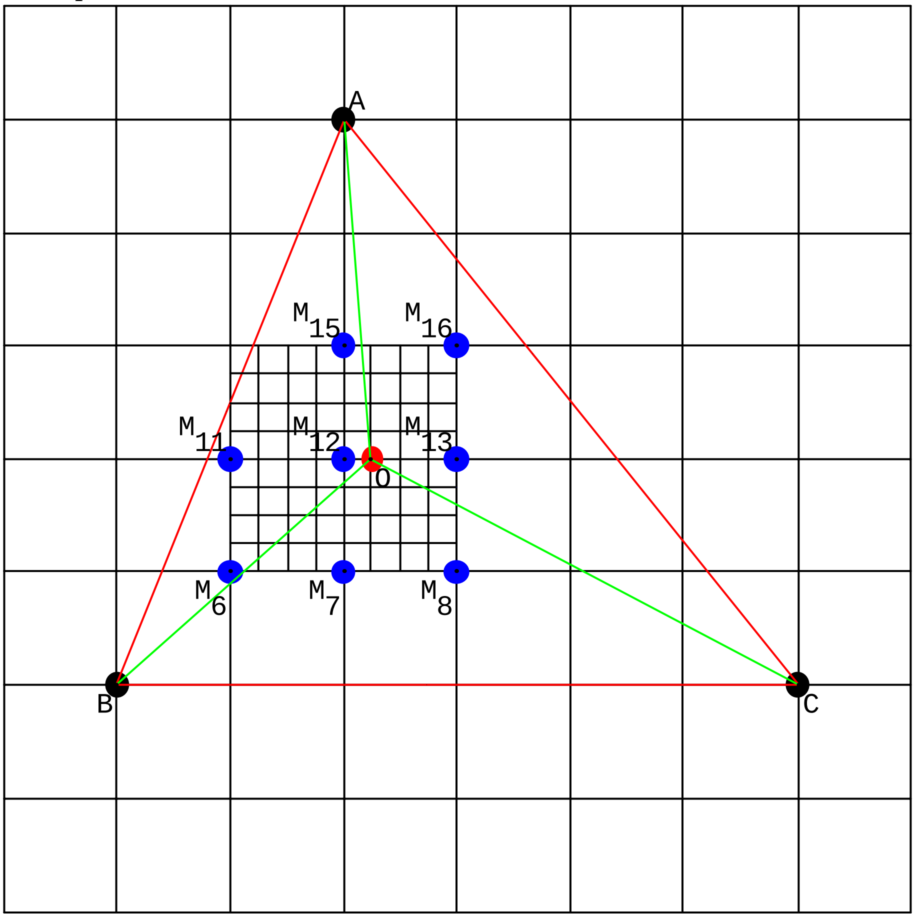
D'où $MA + MB + MC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{13} \approx 10{,}90$.
Nous avons procédé ainsi pour chaque nœud du quadrillage situé à l'intérieur du triangle ABC.
Pour A nous avons : $AA + AB + AC = \sqrt{29} + \sqrt{41} \approx 11{,}78$

B : $6 + \sqrt{29} \approx 11{,}38$
C : $6 + \sqrt{41} \approx 12{,}4$
M_1 : $6 + 2\sqrt{6} \approx 10{,}89$
M_2 : 11
M_3 : $6 + 2\sqrt{6} \approx 10{,}89$
M_4 : $6 + \sqrt{29} \approx 11{,}38$
M_5 : $6 + \sqrt{34} \approx 11{,}83$
M_6 : $\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{26} \approx 10{,}63$
M_7 : $4 + \sqrt{5} + \sqrt{17} \approx 10{,}35$
M_8 : $2\sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 10{,}44$
M_9 : $3\sqrt{5} + \sqrt{17} \approx 10{,}83$
M_{10} : $5 + \sqrt{2} + \sqrt{26} \approx 11{,}51$
M_{11} : $\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{29} \approx 10{,}78$
M_{12} : $3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \approx 10{,}30$
M_{13} : $\sqrt{10} + 2\sqrt{13} \approx 10{,}37$
M_{14} : $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{13} \approx 10{,}90$
M_{15} : $7 + \sqrt{13} \approx 10{,}60$
M_{16} : $6\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 10{,}72$
M_{17} : $1 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \approx 11{,}12$



Il apparaît donc que la plus petite longueur est obtenue pour le point M_{12} soit $3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ ($\approx 10{,}30$) côtés de carreaux.
Cependant, rien ne nous assure que la solution cherchée soit située sur un nœud du quadrillage. Par conséquent, pour affiner notre recherche, nous avons diviser avec plus de précision le quadrillage de la zone voisine du point M_{12} dans laquelle doit se trouver la solution cherchée.

Par la même méthode que précédemment, utilisation du théorème de Pythagore dans des triangles rectangles, nous avons poursuivi nos calculs et obtenu les résultats suivants :



La distance minimale est obtenue pour le point O et nous avons alors :

$$OA^2 = (\frac{1}{4})^2 + 3^2 = \frac{1}{16} + 9 = \frac{145}{16} \quad \text{donc} \quad OA = \frac{\sqrt{145}}{4}$$

$$OB^2 = 2^2 + (2 + \frac{1}{4})^2 = 4 + \frac{81}{16} = \frac{145}{16} \quad \text{donc} \quad OB = \frac{\sqrt{145}}{4}$$

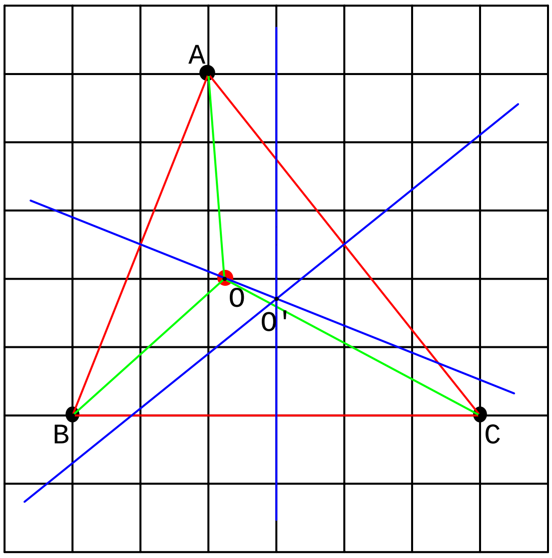
$$OC^2 = 2^2 + (3 + \frac{3}{4})^2 = 4 + \frac{225}{16} = \frac{289}{16} \quad \text{donc} \quad OC = \frac{17}{4}$$

D'où $OA + OB + OC = \frac{17}{4} + \frac{\sqrt{145}}{2} \approx 10{,}27$.

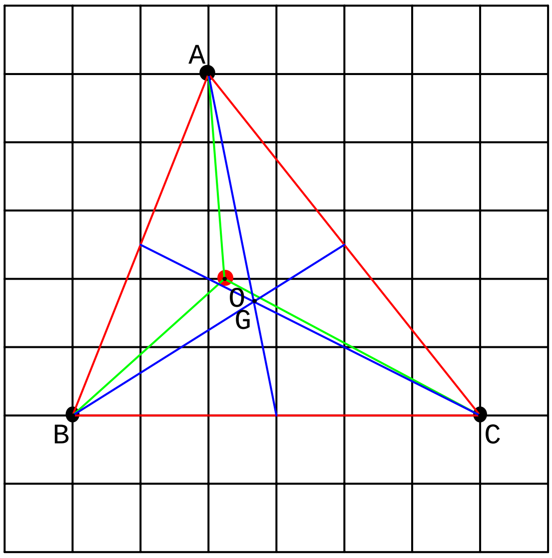
Nous pourrions comme nous venons de le faire, à nouveau diviser le quadrillage dans le voisinage du point O pour préciser la position du point solution. Toutefois cela commence à devenir difficilement lisible et assez fastidieux. Mais en observant bien la position du point O obtenue, il semble que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ soient égaux … nécessairement à 120°.
Resterait donc à démontrer que si une solution existe, c'est le point sous lequel on voit A, B et C sous des angles égaux … à 120°.

IV – <u>Points remarquables du triangle</u>

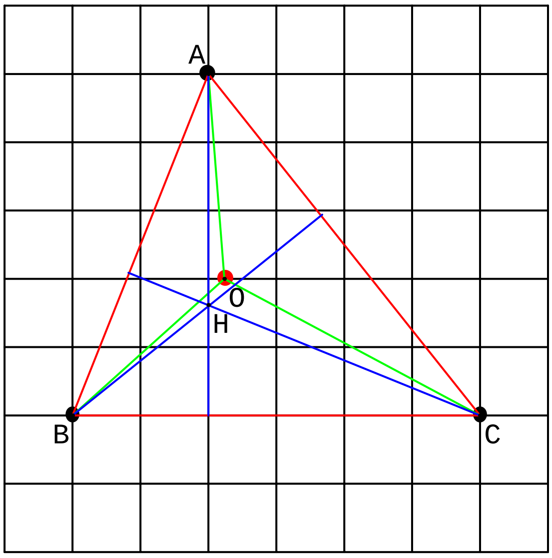
Une dernière supposition était à vérifier : est-il possible que le point cherché soit l'un des points remarquables du triangle que nous connaissons : centre du cercle circonscrit, centre de gravité, orthocentre ou centre du cercle inscrit ?
En plaçant sur la configuration étudiée dans la partie précédente ces différents points et en observant, il nous semble que non. Cependant nous n'avons pu le démontrer mais juste le remarquer en effectuant au compas des reports de longueurs.
Les figures suivantes retracent nos constatations et permettent de se faire une idée plus précise de la situation :



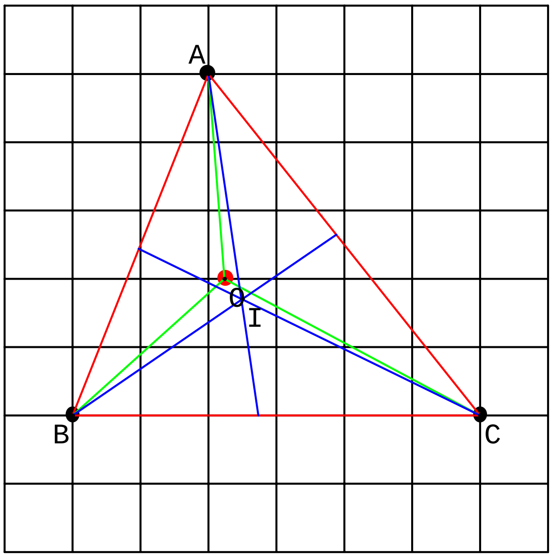
O' centre du cercle circonscrit



G centre de gravité



H orthocentre



I centre du cercle inscrit

V – <u>Conclusion</u>

Nous avons, nous semble-t-il, réussi à trouver la position de l'éventuelle solution du problème lorsque l'on veut relier trois bureaux. Malheureusement nous en sommes restés à un stade de conjecture et aucune démonstration de l'observation n'a été faite.

D'autre part, il pourrait être intéressant d'étudier certains cas particuliers de positions des trois bureaux : formation d'un triangle équilatéral, isocèle ou rectangle ou encore d'un triangle dont l'un des angles est « fortement » obtus afin d'observer l'évolution de la position du « point solution ». Il serait logique que dans le cas du triangle équilatéral la solution vienne se confondre avec les autres points remarquables (orthocentre, centre de gravité, …).

Enfin la méthode d'étude et de recherche présentée ici devrait pouvoir être adaptée aux problèmes similaires mais présentant plus de bureaux à relier : quatre, cinq, voire plus …