Chaînes d'additions

Par un élève de Seconde du lycée Fragonard de l'Isle Adam (2007-2008) : Bertie Brousse
Enseignants : Dominique Baroiller et Annick Boisseau
Chercheur : Philippe Guillot

Le sujet : On se donne un entier *n*. Une chaîne d'additions est une suite d'entiers dont le premier terme est 1, le dernier terme est *n* et chaque terme est la somme de deux termes obtenus précédemment. Quelques questions : pour un entier *n*, quelle est la longueur d'une chaîne la plus courte ? la meilleure chaîne ? Est-ce toujours possible ? Et si on s'autorise également des soustractions ?
Une utilité de telles chaînes : obtenir une puissance d'un nombre en effectuant le moins d'opérations possible.

I- Qu'est ce qu'une chaîne d'additions ?

Pour réaliser une chaîne d'additions nous partons de 1. On ne peut ajouter au dernier résultat, que des nombres entiers précédemment obtenus.

Exemples de chaînes jusqu'à 15 :

1) 1→2→4→8→12→14→15
   1+1=2 \ 2+2=4 \ 4+4=8 \ 8+4=12 \ 12+2= 14 \ 14+1=15, soit 6 étapes.

2) 1→2→3→5→10→15
   1+1=2 \ 2+1=3 \ 3+2=5 \ 5+5=10 \ 10+5=15, soit 5 étapes.

Le but est de faire des chaînes d'une longueur minimale.

Ceci sert à élever des nombres à une certaine puissance en effectuant une série de multiplications, la plus courte possible.

Exemple : Pour calculer a^{15}, au lieu de 14 multiplications, en utilisant les chaînes précédentes, il suffit de 6 ou 5 étapes.

$a^{15} = (((a^2)^2)^2 \times ((a^2))^2 \times a^2 \times a$: 6 étapes

$a^{15} = \left(a^3 \times a^2\right)^2 \times \left(a^3 \times a^2\right)$: 5 étapes

II- Méthodes aidant à obtenir des chaînes courtes

Deux méthodes ont été trouvées pour obtenir des chaînes de petite longueur.

1) Méthode binaire

Cette méthode consiste, en partant de 1, à multiplier par 2 jusqu'à ce que l'on ne puisse plus procéder ainsi sans dépasser le nombre recherché, puis à ajouter des nombres précédemment obtenus pour arriver au résultat recherché.

Exemple :
Pour 19 : 1→2→4→8→16→18→19

Cette méthode est dite « binaire » car elle dépend de l'écriture binaire du nombre, ainsi 19 s'écrit 10011 en base deux. En effet :

1	0	0	1	1
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$2^4 \times 1 = 16$	$2^3 \times 0 = 0$	$2^2 \times 0 = 0$	$2^1 \times 1 = 2$	$2^0 \times 1$

Donc 19 = 16 + 0 + 0 + 2 + 1
Ainsi, nous avons besoin d'aller jusqu'à 16 (4 additions) puis d'ajouter 2 et 1 : en tout, six étapes.

Pour 31, la chaîne obtenue avec la méthode binaire est :
1→2→4→8→16→24→28→30→31 et son écriture en binaire est 11111

1	1	1	1	1
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$2^4 \times 1$	$2^3 \times 1$	$2^2 \times 1$	$2^1 \times 1$	$2^0 \times 1$

Donc 1+2+4+8+16 = 31
Nous devons aller jusqu'à 16 puis ajouter 8; 4 ; 2 et 1 : en tout huit étapes.

La longueur de la chaîne obtenue avec cette méthode dépend de l'écriture binaire sur deux points :
- La longueur de l'écriture binaire : plus elle sera longue, plus le nombre d'étapes pour arriver à la dernière puissance sera grand. Ce nombre est égal au nombre de chiffres de l'écriture binaire -1 (le chiffre retiré étant le 1 du début).
- Le nombre de 1 dans l'écriture binaire : plus il sera grand, plus le nombre d'étapes entre la dernière puissance et le nombre recherché sera grand. Ce nombre est égal au nombre de 1 dans l'écriture binaire -1 (le 1 retiré est la dernière puissance obtenue).

Ainsi le nombre d'étapes qu'il faut avec cette méthode est égal au nombre de chiffres de l'écriture binaire + le nombre de 1 – 2.

Remarque : Cette méthode ne conduit pas nécessairement à une chaîne la plus courte pour atteindre un nombre donné.

Décomposition en facteurs premiers

Cette méthode est plutôt efficace, mais ne permet pas d'obtenir les chaînes les plus courtes à tous les coups. Cette méthode consiste à se servir de la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres naturels. Dans le cas où le nombre n est premier, on peut prendre $n - 1$ qui ne l'est pas. (Rappel : Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.)

Définition : On définit ici l'ordre des nombres comme le nombre minimal d'additions nécessaires pour les atteindre.

Exemple : Décomposition de 30 en facteurs premiers : $30 = 2 \times 3 \times 5$

Ordre de 2→1
Ordre de 3→2
Ordre de 5→3

On commence par réaliser la chaîne du nombre premier qui a le plus grand ordre, ensuite on se sert de la chaîne de celui de l'ordre inférieur le plus proche et ainsi de suite :
1→2→3→5→10→15→30
1→ 2 → 3
1→ 2
En tout, 6 étapes, ce qui correspond à la somme des ordres des facteurs premiers de 30.

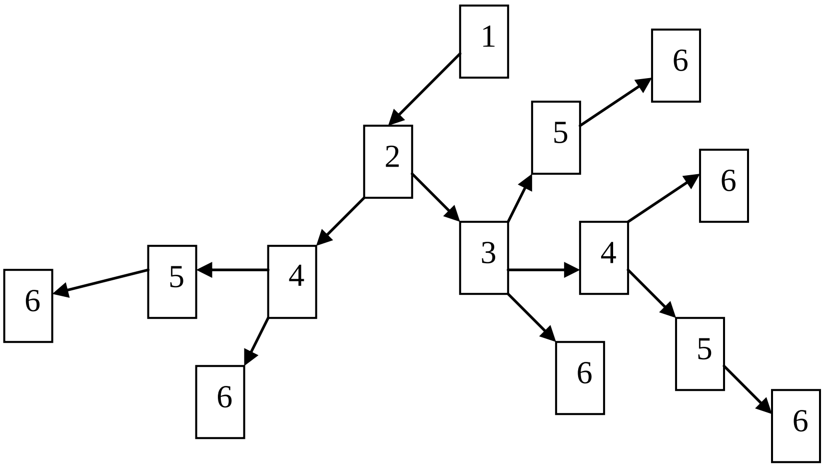
Dans le cas où le nombre *n* est premier on lui soustrait 1 et on réalise la même opération avec le résultat *n* - 1.
Exemple : 31 est premier
31–1 = 30
30 = 2 × 3 × 5
1→2→3→5→10→15→30→31 et on rajoute le 1 à la fin
1→ 2 → 3
1→ 2 (1)

III- Modèles de chaînes

Deux modèles représentant des chaînes d'additions ont été trouvés.
L'idée était d'obtenir une sorte de carte des chaînes d'additions existantes pour un nombre donné.

1) **Modèle arbre**

Ce modèle est le premier qui a été créé : on part du nombre 1 et on trace une flèche pour aller au nombre suivant :

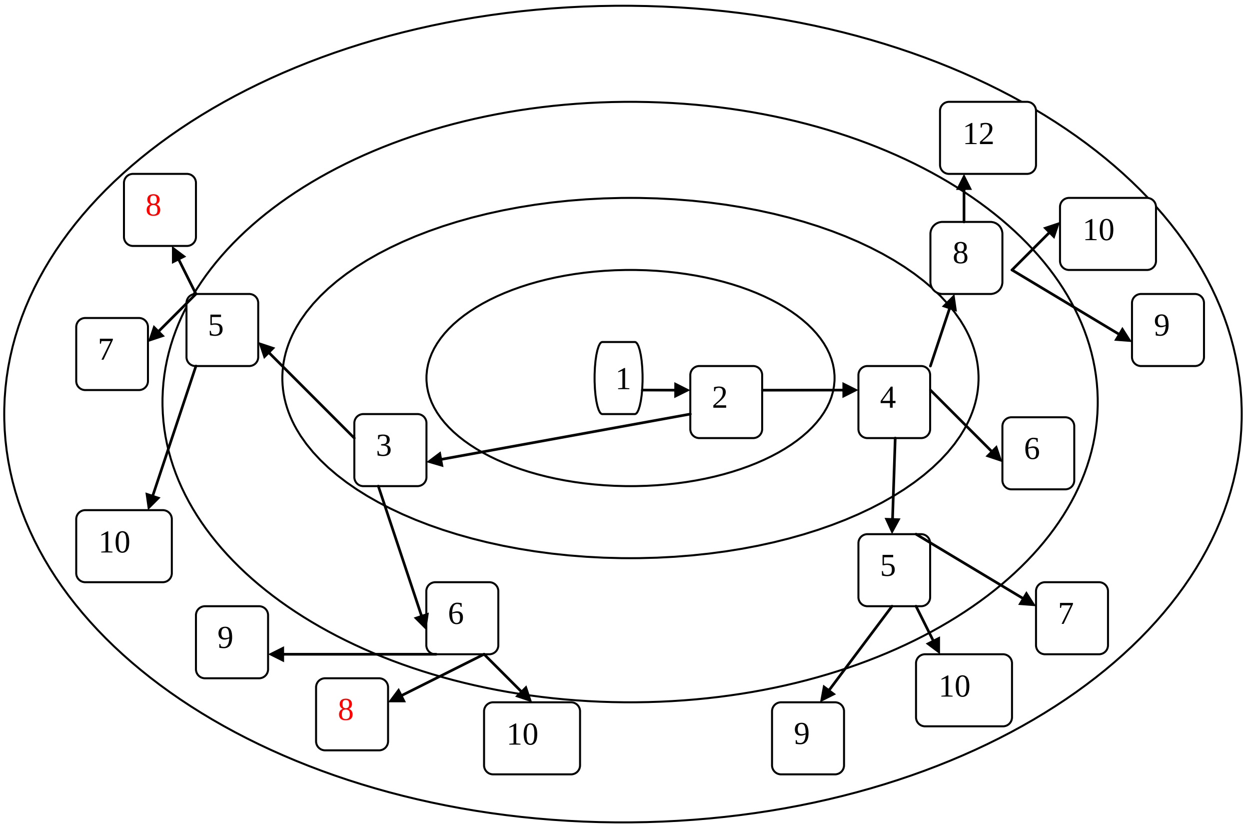


Arbre de chaînes allant jusqu'à 6

Ce modèle devient rapidement confus et difficile à poursuivre : le nombre de branches ne cesse de croître. On commence vite à être gêné car plus on va loin dans cet arbre, plus le nombre de branches augmente et plus le nombre de possibilités pour arriver à un même nombre augmente.

On observe par exemple six chaînes aboutissant à 6, dont deux « plus courtes », constituées chacune de 3 étapes.

2) Modèle circulaire



Ici on place les nombres par le nombre d'additions nécessaires pour les atteindre : le premier cercle représente la première opération, le second la seconde opération … . Ce modèle est pratique pour trouver les chaînes les plus courtes car elles sont celles où le nombre voulu est le plus proche du 1. Les branches où un nombre est apparu à un cercle précédent deviennent inutiles, donc ne seront pas continuées. Ces dernières sont en rouge. Cependant avec le temps, comme dans le cas précédent les branches deviennent trop nombreuses.

Conclusion

Nous avons défini des méthodes pour construire des chaînes d'additions. La méthode binaire donne toujours un résultat, mais la chaîne obtenue n'est pas la plus courte. La méthode par factorisation donne des bons résultats, et pour l'appliquer, nous avons établi des modèles de chaînes les plus courtes pour les petits nombres. Cette méthode nous a permis de trouver des chaînes courtes intéressantes.

Nous n'avons pas eu le temps d'explorer ce qui se passe si on autorise aussi les soustractions…

Note d'édition

(1) La technique proposée est très générale : elle montre en fait que si C(n) est la plus courte chaîne (en nombre d'étapes) pour n, alors on a la formule $C(ab) \leq C(a)+C(b)$ pour toute paire d'entiers a,b.