C’est du lard

Gardiens de musées

Année 2016 - 2017

Elèves : Antoine BOUSQUET, Stéphanie CAPIT, Marie JACQUELIN, Alice PANNETIER, Eva ROUSSEL, Maria VIDEAUD (Seconde)
Julien CAID (Terminale S)

Établissements :
Lycée Michel MONTAIGNE, BORDEAUX
Lycée Sud-Médoc, LE TAILLAN MEDOC

Enseignants :
Mathieu CLAUDEL, Jean-Pierre HAUR, Sandra COUROSSE, Nicolas JOUSSE

Christine BACHOC, Université de Bordeaux

Présentation du Sujet :

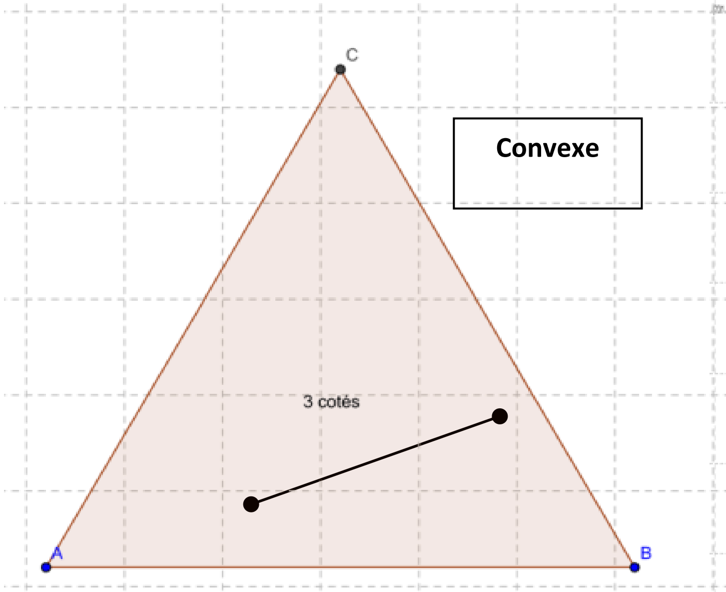
Madame Dell’arte a un projet ambitieux : construire une galerie d’art sécurisée.

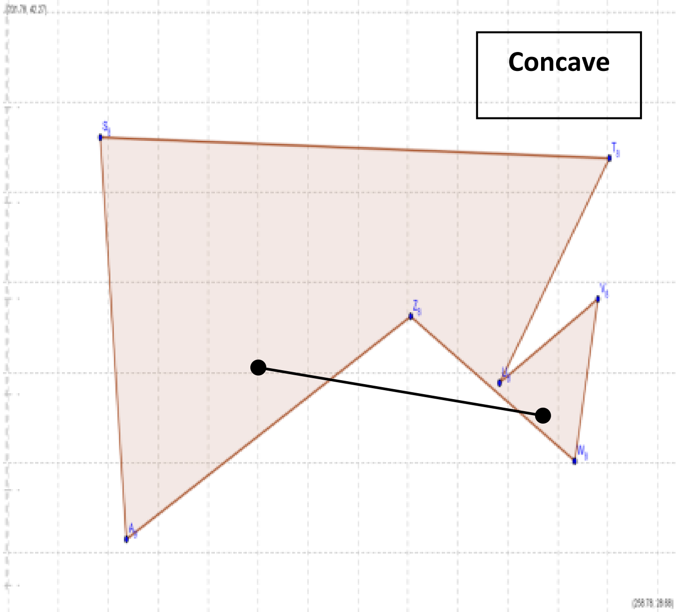
Elle souhaite avoir une idée du nombre de gardes nécessaires pour surveiller sa galerie sachant que sa galerie sera sous la forme d’un polygone.

Elle part du principe que chaque gardien est immobile, a une vision illimitée et à 360 degrés.

Après une présentation des deux familles de polygones, nous étudierons quelques cas particuliers. Nous proposerons alors une méthode de calcul du nombre de gardiens nécessaires par une méthode de « triangulation ». Enfin, nous regarderons comment évolue le problème si on décide de mettre des miroirs sur tous les murs de la galerie d’art.

1. Les types de polygones





Un polygone est convexe lorsque l'on peut relier deux points de ce polygone par un segment dont tous les points appartiennent à ce polygone. Dans le cas contraire, on dit qu'il est concave.

Il est facile de constater que, pour un polygone convexe, il suffit d'un seul gardien car il peut voir tous les points du polygone sans angles morts. Ainsi, dans toute la suite, nous n'étudierons que les polygones concaves.

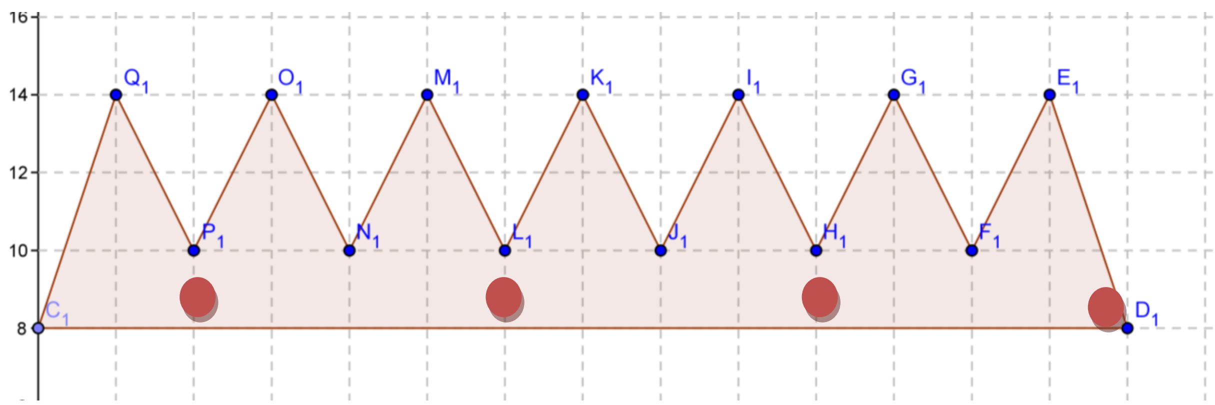
2. Quelques concaves particuliers

a. La couronne

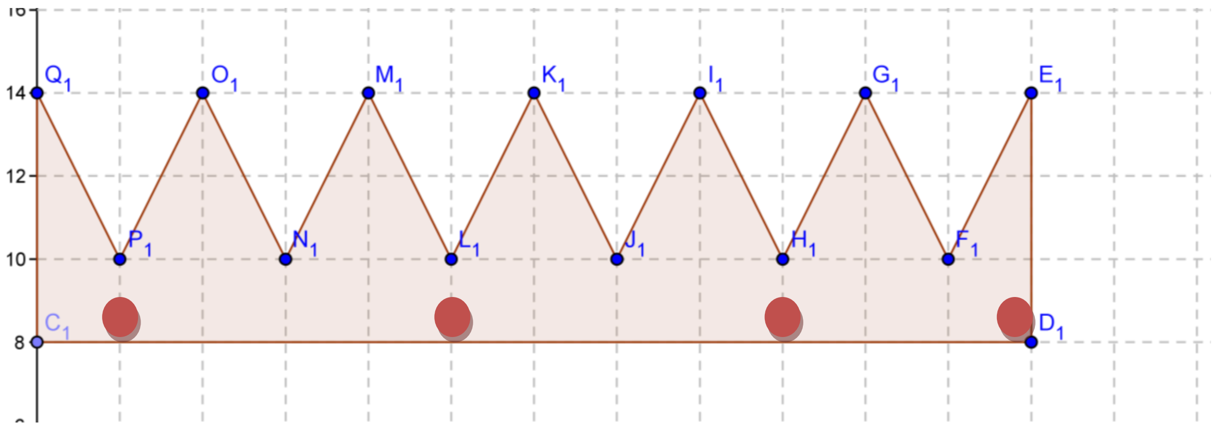
Sur cette forme régulière, on cherche une formule générale pour connaître le nombre minimal de gardiens nécessaires à la surveillance de toute la pièce.

Pour le cas avec seulement des pics en entier :
on a déterminé (1) une formule en fonction du nombre de pics « n ». ainsi la formule trouvée est 2*n+1 côtés.

Ex : pour 7 pics en utilisant la formule on trouve 15 côtés



Pour le cas avec n pics entiers et 2 demi-pics (à gauche et à droite) :
Dans cette figure, il y a n pics entiers et un demi-pica chaque extrémité. Ainsi la formule utilisée est semblable au précédent cas : on détermine toujours une formule en fonction du nombre de pics « n » et la formule trouvée est donc 2*n+ 5 côtés

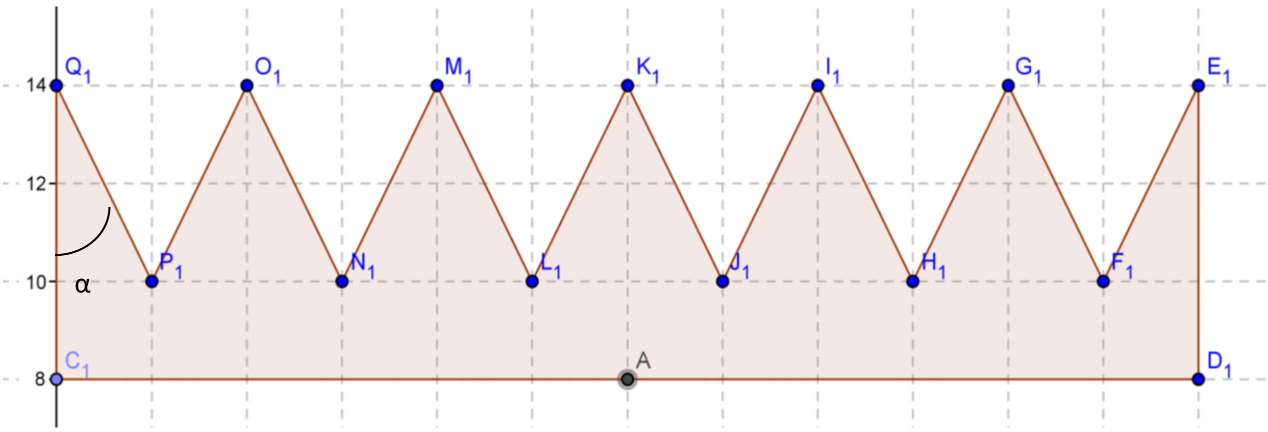


Ex : pour 5 pics entiers on trouve 15 côtés avec la formule précédente.

Par ailleurs, voici des résultats valables pour les deux cas mais non optimaux :
pour trouver le nombre de gardiens permettant de voir toute la pièce on a deux solutions :

- Si le nombre n de pics + demi-pics est pair, en plaçant n/2 gardiens alors toute la couronne est vue.
- Si le nombre n de pics + demi-pics est impair, on utilise la formule (n+1)/2 afin d'avoir suffisament de gardiens pour surveiller toute la pièce.

Pour terminer le cas de la couronne, regardons une propriété :



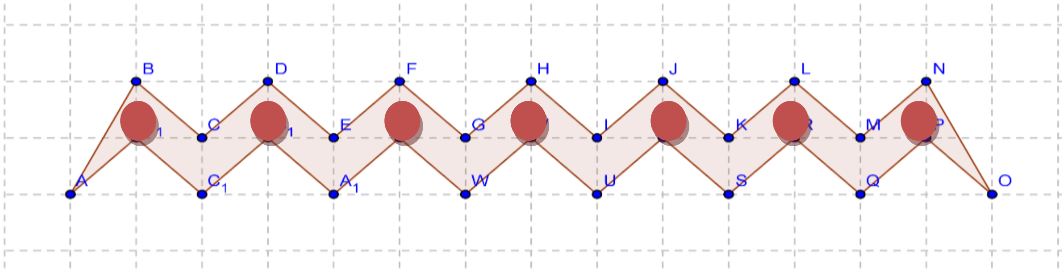
Soit A le milieu de $[C_1D_1]$. Appelons α l'angle en Q_1

Si tous les angles de sommets $Q_1O_1M_1K_1I_1G_1\,E_1$ sont égaux alors, et si

α>= Arctan(AC_1/Q_1C_1), alors un seul gardien au point A suffit. (2)

b. L'éclair

Pour cette figure répétitive, lorsque qu'on a uniquement des « V » en entier : on a compris que pour chaque « V » à l'envers, soit 4 côtés, il faut un gardien.



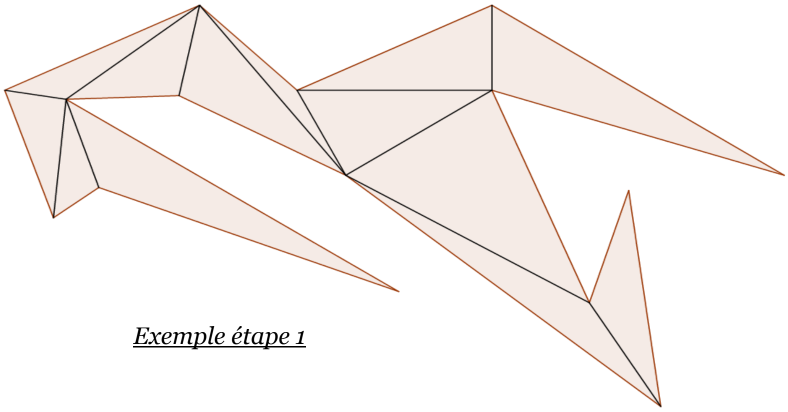
3. La triangulation

On s'intéresse dans ce paragraphe à une salle de forme quelconque. Sur cette salle, on ne peut donc pas appliquer les règles établies auparavant. Etablir une formule générale ne paraît pas la solution la plus optimale car le nombre de gardiens dépend plus de la forme que du nombre de côtés. Nous avons donc trouvé une technique afin de coder la figure et établir le nombre de gardiens nécessaire le plus optimal. Cette technique se déroule en plusieurs étapes.

Etape 1 :
Couper la figure en triangles (les triangles sont les formes convexes les plus simples, si on place un gardien sur chaque triangle, toute la figure sera surveillée)

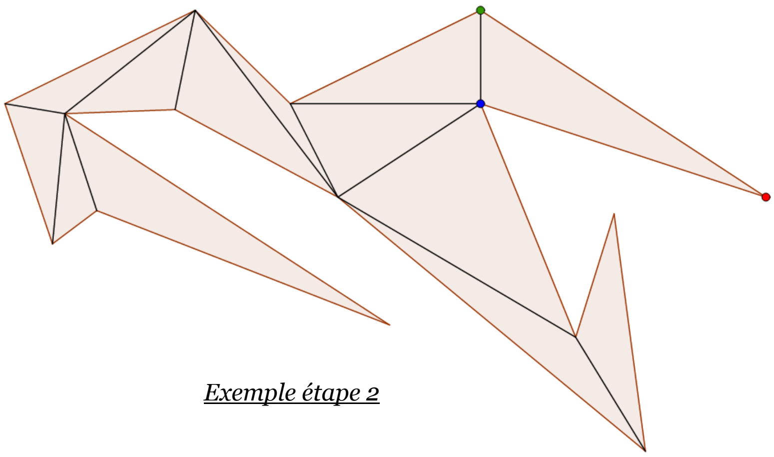
Ce découpage obéit à trois règles :

- ➔ Ne pas créer de point (autres que les sommets existants)
- ➔ Tous les sommets de la figure doivent être le sommet d'un triangle
- ➔ Les segments ainsi créés ne doivent pas être sécants



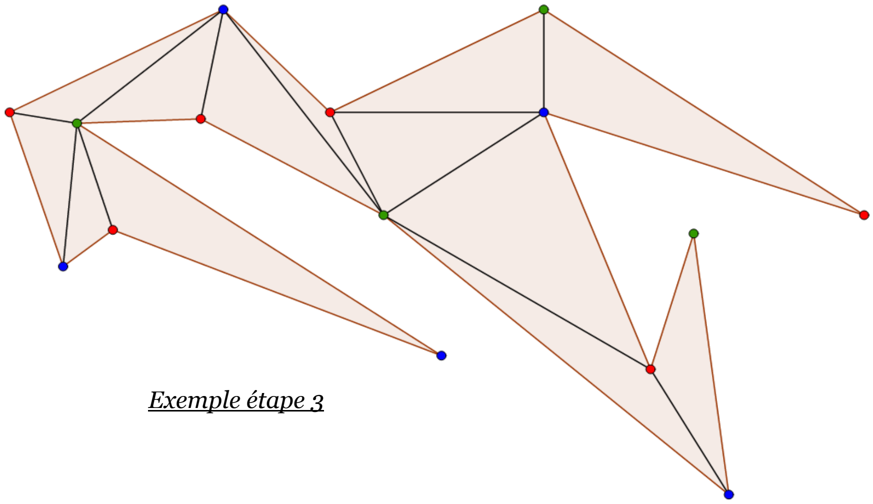
Exemple étape 1

Etape 2 :
On code un des triangles (on peut prendre n'importe lequel)
Il faut prendre trois couleurs et marquer les trois sommets du triangle de sorte que le triangle possède chaque couleur.



Exemple étape 2

Etape 3 :
Ensuite, on code les autres triangles de sorte qu'ils possèdent tous chacun les trois couleurs.
Par récurrence, deux points adjacents ne seront jamais de la même couleur.

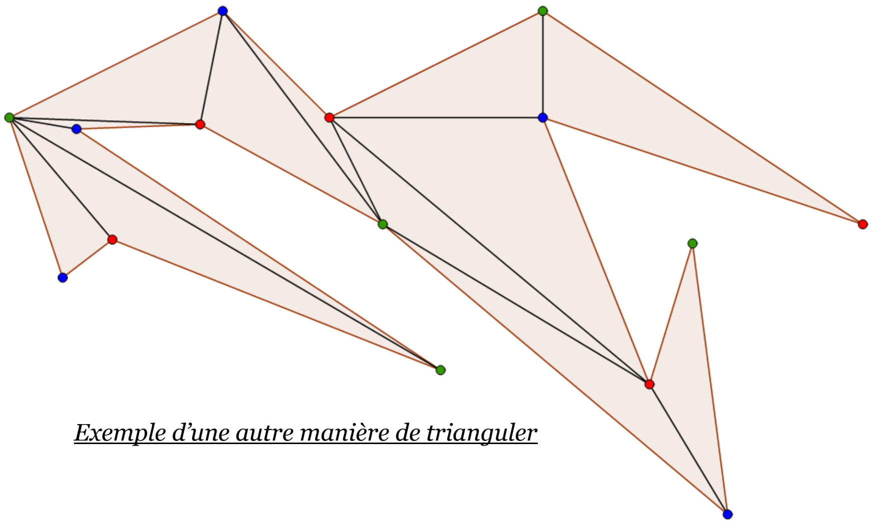


Exemple étape 3

Etape 4 :
Si on place un garde à chaque position d'une couleur, tout le musée est surveillé. Il est donc intéressant de trouver la couleur qui comporte le moins de positions. On compte alors le nombre de positions pour chaque couleur, on les compare et on prend le plus petit.

Inconvénients de cette méthode :

- Il existe plusieurs découpages qui peuvent modifier le nombre de gardes minimum, donc on n'est pas sûr d'obtenir le bon nombre du premier coup.
- Pour certaines figures, elle ne fonctionne pas. On peut citer par exemple la couronne à deux pics. On trouve 2 gardes dans tous les découpages alors qu'un seul suffit.

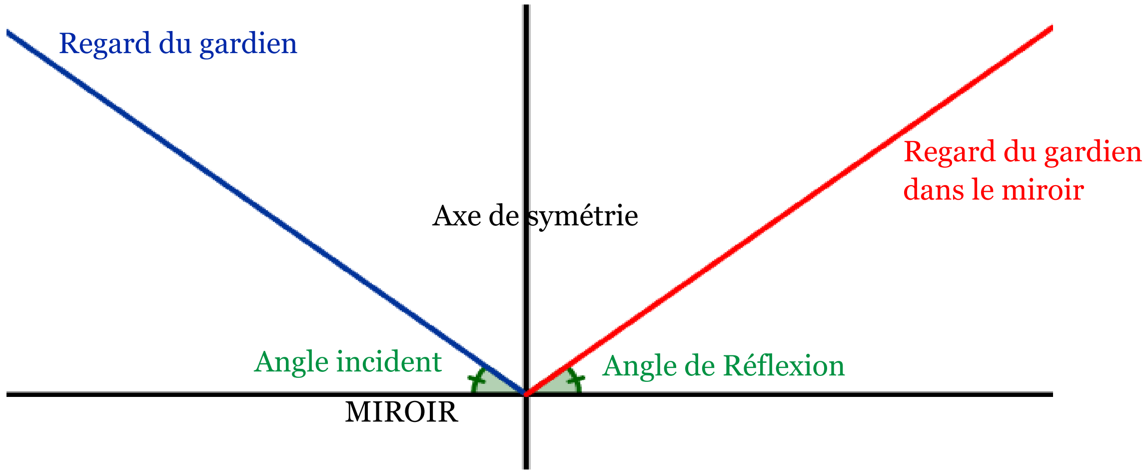


Exemple d'une autre manière de trianguler

4. Les Miroirs

Dans un deuxième temps, la directrice a eu une idée géniale. Elle pense à recouvrir les murs de sa galerie par des miroirs afin de profiter de la réflexion de la lumière. Si elle fait ça, aura-t-elle besoin de moins de gardiens ? Pourront-ils s'installer n'importe où dans la pièce ?
(On supposera que les tableaux eux-mêmes sont capables de réfléchir la lumière.)

Il faut tout d'abord définir l'angle d'un rayon partant du regard du gardien se reflétant sur le miroir :



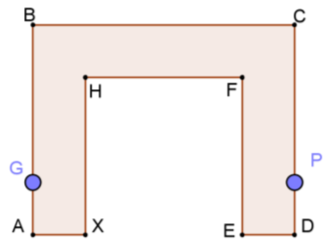
On suppose que dans une figure en forme de U, quelle que soit sa place, le gardien pourra voir tous les « coins » de la salle.

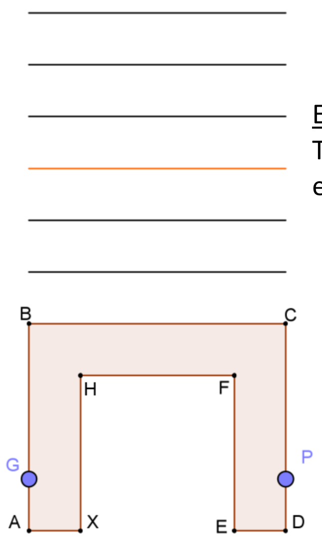
Démonstration :

Il faut modéliser les reflets du miroir. On procède alors à un dépliement de la figure dans l'espace (voir image ci-dessous).

Pour répondre à cette question, on peut utiliser une technique de dépliage qui utilise la symétrie axiale à travers un segment que l'on définit comme étant un miroir :

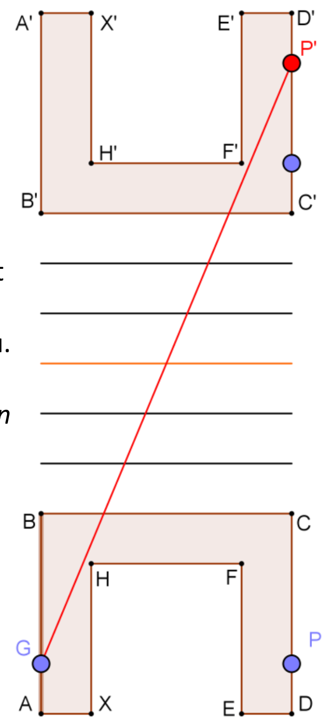
On appelle ABCDEFHX la figure en forme de U. On appelle G le point de la figure correspondant à l'emplacement du gardien et P le point que le gardien veut voir.



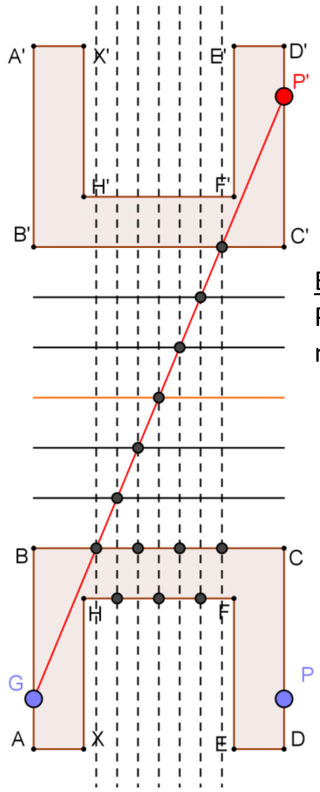


<u>Etape 1</u> :

Tracer un nombre n de miroirs qui correspond aux nombres de reflets envisagés du regard du gardien pour atteindre le point qu'il veut voir.

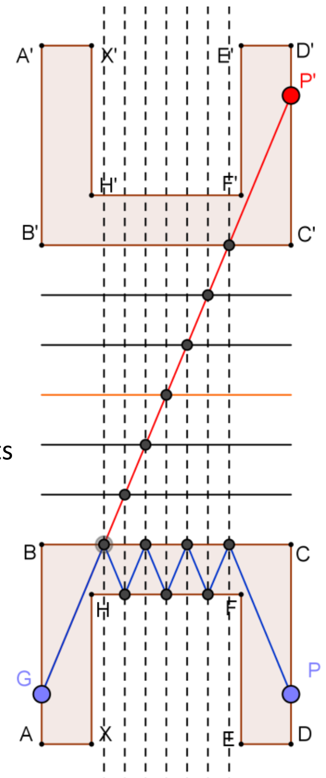


Etape 2 :
Tracer le symétrique de ABCDEFHX, A'B'C'D'E'F'H'X' sur le dernier trait correspondant au dernier miroir (par rapport au miroir du centre).
Ensuite, tracer P' le symétrique du point P par rapport au miroir du milieu.
Tracer la droite (GP').
Remarque : Tous les points du symétrique de la figure en U que le gardien voit sont visibles dans le premier U.



Etape 3 :
Prendre les points d'intersections entre (GP') et chaque dépliage des miroirs. Puis tracer les perpendiculaires à (BC).

Etape 4 :
Relier tous les points obtenus dans la figure en forme de U. On obtient les reflets d'un des rayons du regard du gardien (en bleu).



Remarque :
Si on place le point P dans « l'angle mort » de la figure U, c'est-à-dire dans la zone invisible du gardien dans la figure U', on peut supposer qu'en effectuant le même type de dépliement une deuxième fois, on réussirait à prouver que le gardien voit tous les points de cette figure.

Nous pensons que le nombre de gardiens nécessaires pour une galerie de n'importe quelle forme et dont les murs sont couverts de miroirs est 1. Cependant, nous n'avons pas réussi à le prouver.

Notes d'édition

(1) Le résultat pourrait être motivé par des exemples.

(2) Le schéma opposé ne semble pas correspondre à la condition sur α.