C'est du billard !

Année 2013/2014

Jean DUBOIS, Alexia GIBERT, élèves de Première S
Encadrés par David GRÉAU
Établissement : Lycée Môquet-Lenoir, Châteaubriant (44)
Chercheur : François DUCROT, faculté des sciences d'Angers

<u>Présentation du sujet</u> :

Dans notre sujet, nous avons considéré deux points A et B placés sur un billard. Nous nous sommes alors demandé si l'on pouvait envoyer une boule placée en A sur une boule placée en B en respectant un nombre n de rebonds avec un enchaînement imposé des n bandes (numérotées une, deux, trois et quatre). Nous avons donc basé nos recherches sur les endroits que l'on peut atteindre avec la première boule après un certain nombre de bandes, comment déterminer les limites atteignables, comment construire la trajectoire que va prendre la boule etc...

Nous avons considéré qu'il y avait une conservation de l'énergie, donc qu'il n'existait pas de forces de frottements, et que, par conséquent, la boule partant de A ne s'arrêtera pas. Par ailleurs, les mouvements s'effectuent en ligne droite.

Nous avons également utilisé la loi du rebond élastique, basée sur le même principe que la réflexion de la lumière : la trajectoire de rebond de la boule est symétrique à la trajectoire initiale de cette boule par rapport à la perpendiculaire à la bande, passant par le point d'impact, sur laquelle s'effectue le rebond.

I- Moyens de construction

Étant donnés deux points A et B, ainsi qu'une bande, on cherche à construire le trajet allant de A à B avec un rebond sur cette bande. Nous avons trouvé deux méthodes pour réaliser cette construction.

A) Premier moyen trouvé

Nous avons déterminé une construction nous permettant de tracer la trajectoire de la boule lorsqu'elle effectue un rebond et qu'on connaît notre point d'arrivée. Nous avons pour cela utilisé le principe de réflexion de la lumière, qui dit que l'angle du rayon incident par rapport à la normale (perpendiculaire à la surface passant par le point d'impact du rayon lumineux, ou dans notre cas, par le point d'impact de la boule sur la bande) est égal à l'angle du rayon réfléchi par rapport à la normale.

1°) Méthode de construction

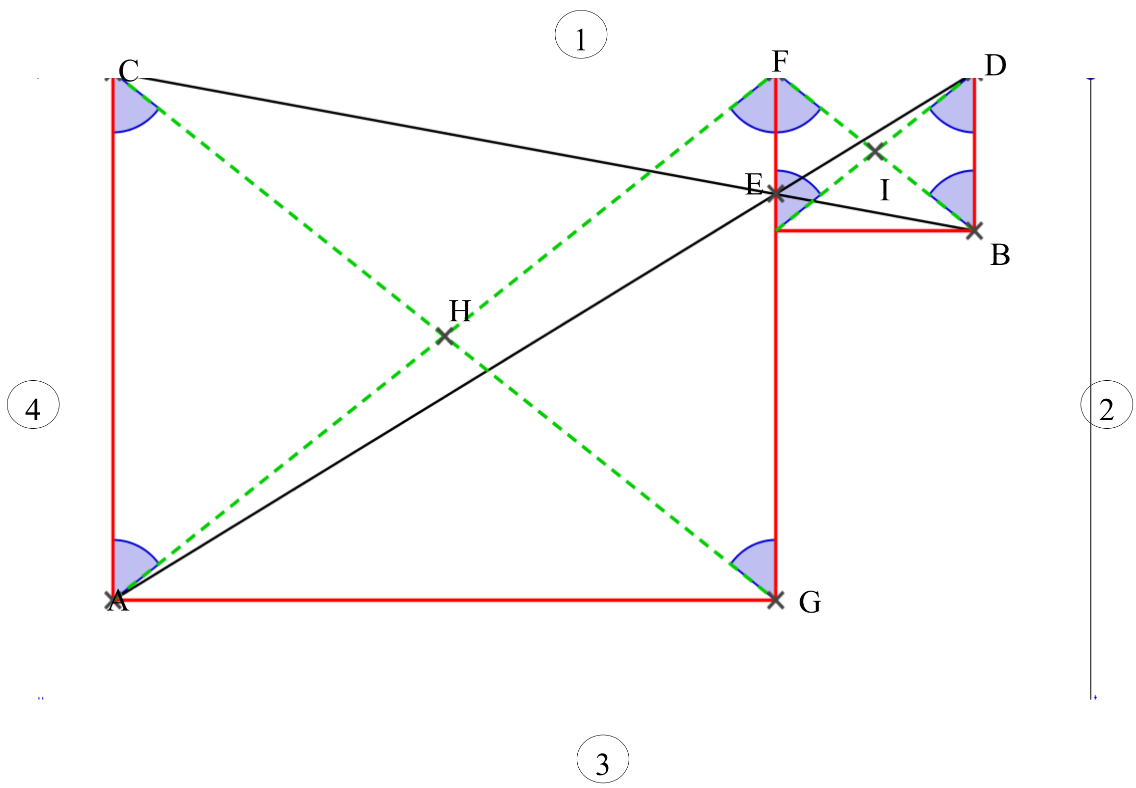
Voici une méthode permettant de déterminer le point d'impact sur la bande 1 qui permet de relier les deux points A et B en respectant les égalités d'angles.

*On part des deux points A et B. On trace ensuite les perpendiculaires à la bande 1 (qu'on nommera *d*), passant par A et B (ces deux droites sont donc parallèles), coupant d respectivement en C et en D.

*On trace ensuite les segments [AD] et [CB].

*Leur intersection est nommée E. On trace ensuite la perpendiculaire à *d* passant par E et coupant *d* en F.

Le point F est alors le point d'impact de la boule sur la bande 1 pour aller de A à B.



2°) Démonstration

Pour prouver que cette construction était exacte, nous allons démontrer que les angles

$\widehat{AFG}$ et $\widehat{GFB}$ sont égaux .

Pour cela , on trace la demi droite [FE), puis la perpendiculaire à (CA) passant par A et coupant [FE) en G ; ainsi que la perpendiculaire à (DB) passant par B et coupant [FE) en M. On obtient ainsi deux rectangles : CFGA et FDBM, dont on trace les diagonales se coupant respectivement en H et en I.

Dans les triangles CEA et DBE, (CA) // (BD) car elles sont tous les deux perpendiculaires à *d*.
→ On peut donc appliquer le théorème de Thalès et on obtient les rapports :

DE/EA = EB/EC = DB/CA

→ Les triangles CEA et DBE sont alors semblables.

CEA et DBE sont inscrits respectivement dans les rectangles CAGF et BDFE. Ils ont pour base un des côtés des rectangles, et leur sommet appartient au côté opposé.

Le théorème de Thalès s'applique de plus pour les triangles FED et EGA puisque (DF) est parallèle à (AG). On a ainsi les rapports :

FD/AG = FE/EG = DE/EA

Le théorème de Thalès s'applique aussi pour les triangles CFE et EBM puisque (CF) est parallèle à (MB). On a ainsi les rapports :

MB/CF = EM/FE = EB/EC

On voit ainsi grâce à l'égalité entre les rapports que tous les triangles CEA, DBE ; FED, EGA ; CFE, EBM sont semblables deux à deux.

Les deux rectangles CAGF et BDFE sont donc également semblables.

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et sont de même longueur. Elles forment ainsi deux triangles isocèles semblables opposés par le sommet : CHA opposé à FHG et FIM opposé à DIB.

Ici avec nos deux rectangles, on a donc deux triangles isocèles (angles de la base égaux) identiques par rectangle, et proportionnels entre rectangles. Les angles des bases de nos triangles (8 au total) sont donc tous égaux.

Ainsi, on a bien : $\widehat{AFG} = \widehat{GFB}$

3°) Note

Nous avons également trouvé d'autres moyens de tracer, notamment lorsque nous voulons effectuer plusieurs bandes avant de rejoindre le point B. Nous les détaillerons dans les parties suivantes.

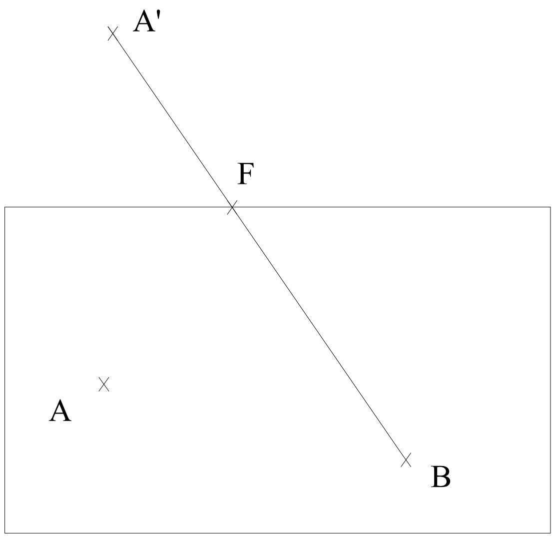
B) Principe de symétrie

Voici une méthode permettant de déterminer le point d'impact sur la bande 1, qui permet de relier les deux points A et B en respectant les égalités d'angles. (1)

*On part des deux points A et B. On trace ensuite A', le symétrique de A par rapport à la bande 1.

*On trace ensuite le segment [A'B]. Celui-ci coupe la bande 1 en un point que l'on nommera F.

Le point F est alors le point d'impact de la boule sur la bande 1 pour aller de A à B.

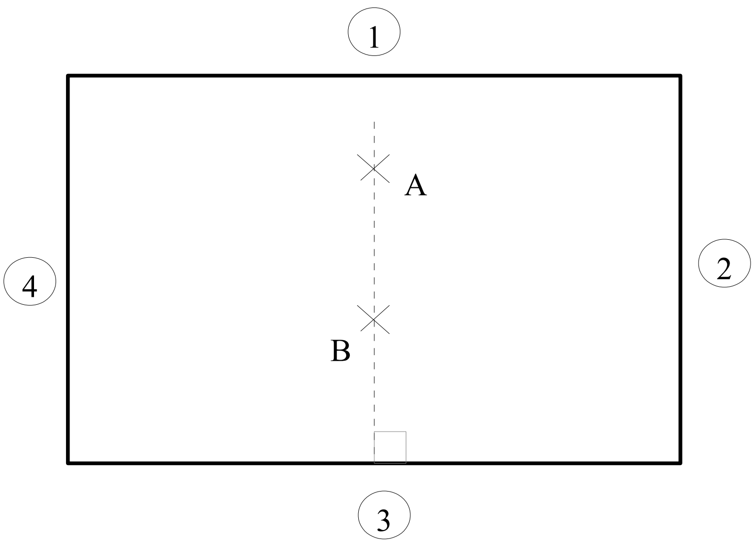


II- Une bande

Nous avons constaté que, dans le cas où nous réalisions un rebond sur n'importe quelle bande, toutes les zones du billard étaient atteignables, d'après le principe de réflexion que nous avons montré précédemment. (2) Cependant, une configuration ne va pas être réalisable pour des questions de physique. En effet, si le point B que l'on veut atteindre est situé entre le point de départ A et la bande sur laquelle A doit rebondir, et placé sur la perpendiculaire à cette bande passant par A, la boule passera d'abord par le point B avant d'effectuer son rebond, ce qui ne présente pas d'intérêt.

Exemple :

Ici, la boule située en A ne peut pas atteindre celle située en B en effectuant d'abord un rebond sur la bande 3 . (3)



III- Deux bandes

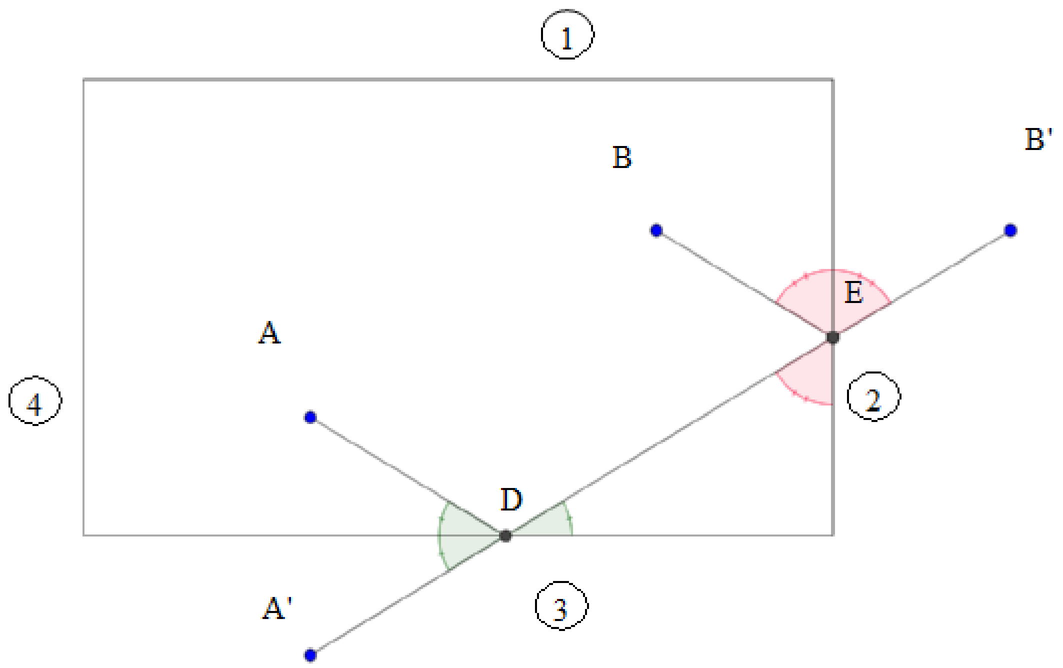
A) Deux bandes consécutives

1°) Pour tracer connaissant les points A et B

Nous avons déterminé un moyen de tracer la trajectoire de la boule pour un enchaînement de deux bandes lorsqu'on connaissait notre point d'arrivée B. Nous avons de nouveau utilisé un principe de symétrie.

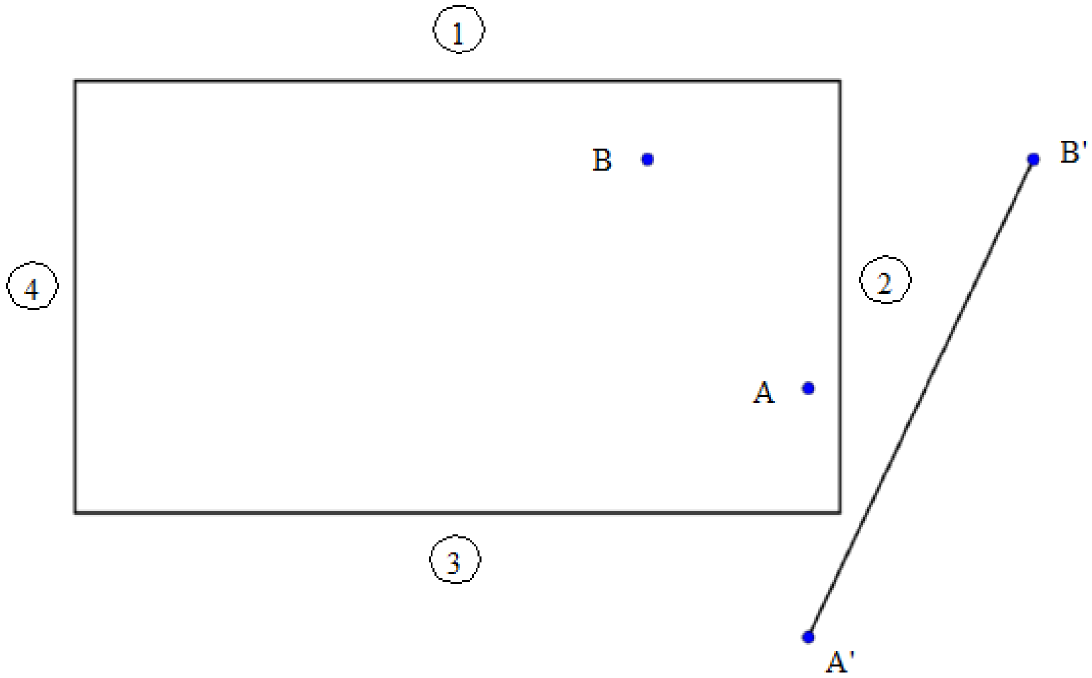
Prenons pour exemple un rebond sur la bande numéro 3, suivit d'un rebond sur la bande numéro 2 (deux bandes consécutives).

Nous allons commencer par tracer le symétrique A' de notre point de départ A par rapport à la première bande (ici, la numéro 3). Nous traçons ensuite le symétrique B' de notre point B par rapport à notre deuxième bande (ici, la numéro 2). Nous relions par la suite nos deux symétriques, ce qui nous permet de déterminer les deux points d'impact de la boule. Nous finissons par relier ces points d'impacts entre eux, ainsi qu'aux points A et B. Cela nous donne ainsi la trajectoire précise décrite par la boule.



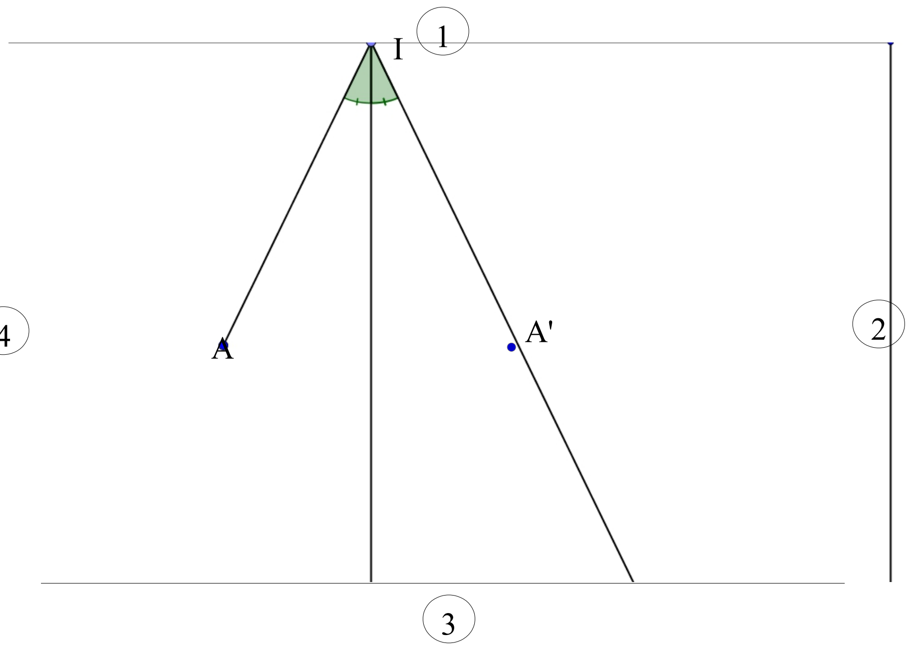
Démonstration :

On place les symétriques des points A et B respectivement par rapport aux bandes 3 et 2, qu'on note A' et B'. On cherche ensuite les points d'impacts D et E. S'ils existent, en poursuivant les segments qui les relient on se rend compte que A', D, E et B' sont alignés puisque les angles opposés par le sommet en D et en E sont égaux (principe de réflexion et conservation des angles par la symétrie axiale). (4) On constate alors qu'il suffit de relier les symétriques de nos points A et B entre eux pour obtenir les points d'impact D et E. Si le segment [A'B'] se retrouve en dehors du billard, alors la boule située en A ne peut atteindre le point B en suivant cet enchaînement de bandes, comme montré ci-dessous (avec comme première bande la numéro trois, et comme deuxième bande la numéro deux, comme pour l'exemple précédent).



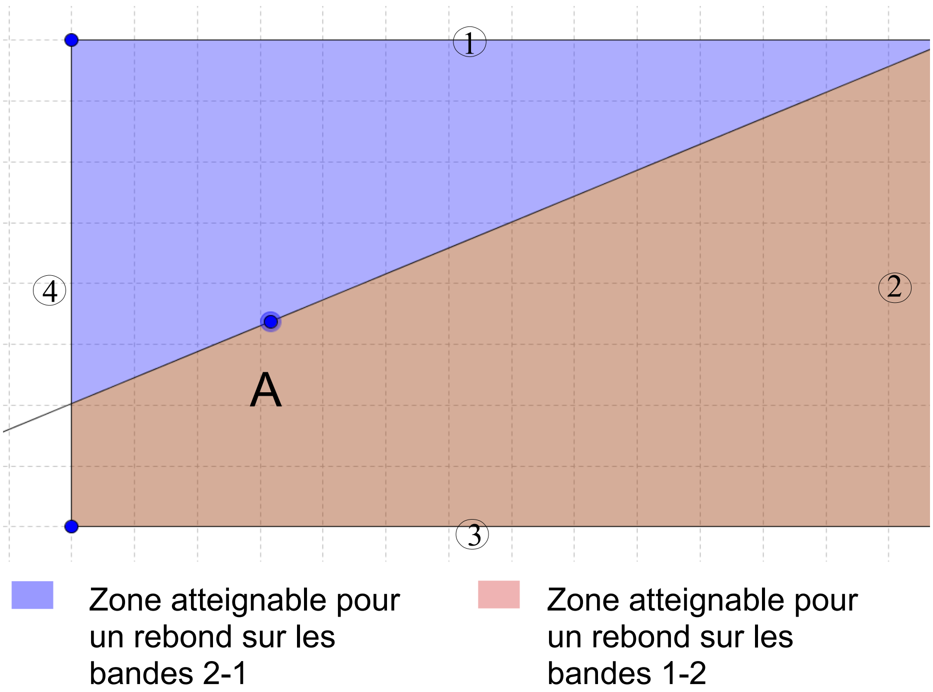
2°) Pour tracer connaissant A et le point d'impact, mais pas B

Lorsqu'on ne connaît pas le point d'arrivée, nous avons trouvé un moyen très simple de construire la trajectoire de la boule. Nous commençons pour cela par choisir le premier point d'impact I de notre boule sur la bande qu'elle doit toucher en premier. Nous traçons par la suite la perpendiculaire à cette bande passant par I, puis réalisons le symétrique A' de notre point de départ A de la boule par rapport à cette perpendiculaire. En reliant ce nouveau point à notre point d'impact, nous obtenons la trajectoire de la boule après son premier rebond. Cela nous donne donc les endroits où peut se situer le point B. Nous pouvons par la suite poursuivre cette technique pour un nombre illimité de bandes.



3°) Limites atteignables

Nous avons observé, sans toutefois le démontrer, qu'il existait une limite particulière aux endroits atteignables par notre boule lorsque nous réalisions deux bandes consécutives. Celle ci est constituée de la droite passant par notre point de départ A et par l'angle du billard entre les deux bandes consécutives à réaliser.



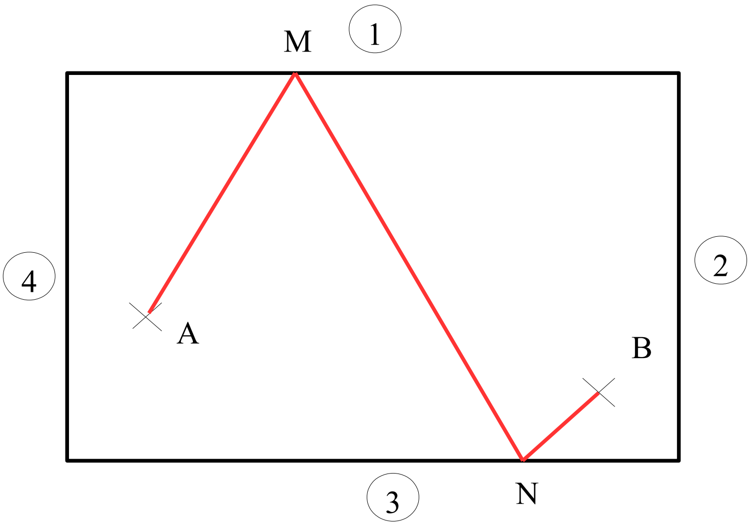
Idée de la démonstration :

Si A' est le symétrique de A par rapport à la bande 1, si B est en dessous de la droite tracée, et si B' est le symétrique de B par rapport à la bande 2, alors le segment [A'B'] coupe nécessairement les deux bandes 1 et 2. En revanche, si B est au dessus de la droite, le segment [A'B'] ne coupe pas les deux bandes 1 et 2.
(Cf : démonstration du III- A) 1°)

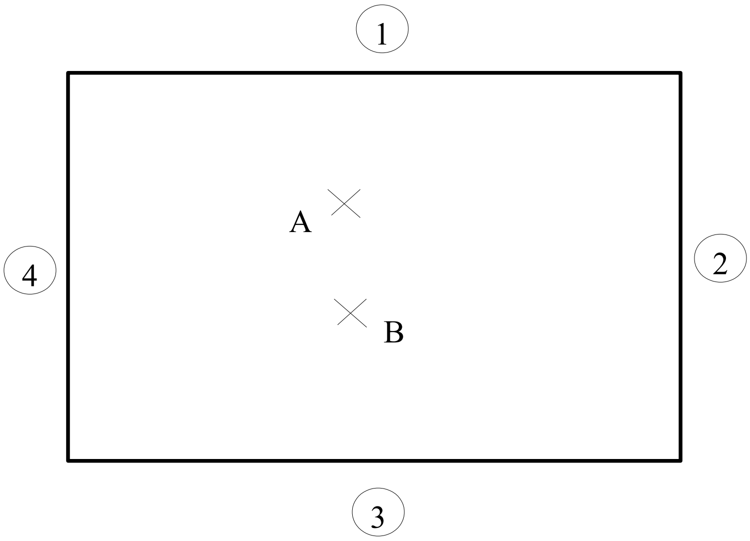
B) Deux bandes parallèles

1°) Possible

Nous avons constaté que presque toutes les situations étaient possibles (voir schéma), puisque nous n'avions pas de contraintes d'angles, excepté pour un cas, montré dans la partie suivante.



2°) Impossible



Ici si l'on part de la boule A et que l'on veut faire les bandes 1/3 ou 3/1 pour rejoindre la boule B, le tracé est impossible car la boule B est sur le chemin de la A. (5)

3°) Note

Nous avons par ailleurs remarqué que, quel que soit le nombre de rebonds à réaliser, s'il doit s'effectuer uniquement sur deux bandes parallèles, le principe sera le même que ce que nous venons de montrer, et toutes les situations seront donc possibles, excepté lorsque les points A et B sont alignés, comme montré dans le 2°)

IV- Trois bandes

A) Pour tracer

Nous avons utilisé le principe de symétrie que nous avons décrit plus haut.
(*Cf : III- A) 2°)*

B) Cas de trois bandes consécutives

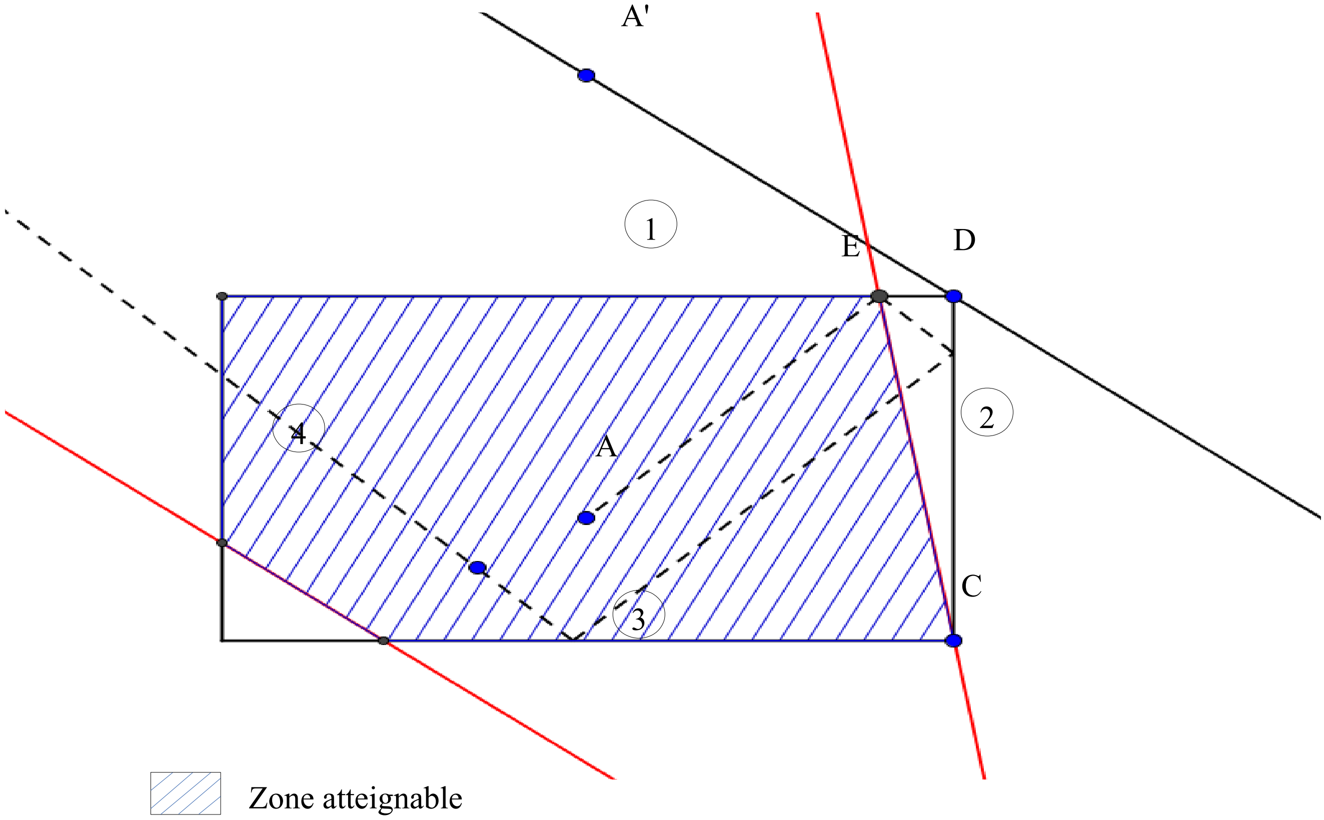
On s'intéresse dans cette partie aux zones atteignables en partant d'un point A et en s'imposant un ordre de trois bandes consécutives (ici 1, 2 puis 3).

Notations :
On note :
- A le point de départ de notre boule ;
- A' le symétrique de A par rapport à la première bande réalisée ;
- E le premier point d'impact de notre boule ;
- D le point à l'angle du billard entre la première bande réalisée et la deuxième ;
- C le point à l'angle du billard entre la deuxième bande réalisée et la troisième.

Nous avons observé, sans toutefois le démontrer, qu'une limite était constituée lorsque nous réalisions ces trois bandes consécutives. Celle-ci est constituée de deux droites, qui peuvent passer ou non sur le billard, en fonction de l'endroit où sont placés le point de départ A et le premier point d'impact de notre boule.

La première droite est la droite (EC).

Pour tracer la deuxième droite, il faut commencer par tracer la droite (A'D). On réalise ensuite le symétrique de cette droite par rapport à C, ce qui nous donne notre deuxième droite limite (en rouge sur le schéma ci-dessous).



Note :

Nous n'avons cependant pas eu le temps de réfléchir à d'autres enchaînements tels que des bandes parallèles puis consécutives (ex : 1, 3, 4) ou des bandes consécutives puis parallèles (ex : 1, 2, 4).

V-Conclusion

En conclusion, nous sommes parvenus à répondre à notre problème, lorsque nous voulions réaliser une, deux ou trois bandes (lorsque celles ci sont consécutives). Nous pourrions poursuivre nos recherches tout d'abord en démontrant ce que nous n'avons pas eu le temps de démontrer, puis en cherchant avec plus de bandes, et peut- être en trouvant une règle pour un nombre infini de bandes.

Nous savons déjà que pour les construire, le moyen serait le même que pour deux bandes lorsqu'on ne connaît pas le point d'arrivée (principe de symétrie). Mais la question se pose pour les zones que la boule pourrait atteindre.

Notes d'édition

(1) Dommage que le principe de symétrie ne soit pas démontré.

(2) La construction utilisant la symétrie a été montrée mais pas celle utilisant le principe de réflexion. En outre parle-t-on ici d'une simple constatation ou d'une affirmation justifiée d'après le principe de réflexion ?

(3) Quel est l'intérêt de s'étendre à deux reprises sur ce cas où la boule B se trouve physiquement sur la trajectoire de la boule A ? Les auteurs étudient le domaine que peut atteindre la boule A après ses rebonds successifs. Dans l'esprit du problème, la boule placée en B est accessoire et peut être remplacée par un simple point B.

(4) L'alignement n'est-il pas obtenu par construction justement ? En quoi le constate-t-on ?

(5) Le cas « *Impossible* » est-il digne d'intérêt là aussi ?