COMPTE-RENDU « MATHS EN JEANS »
LYCEE OZENNE 2002
Groupe 1 : Comment faire une carte juste de la Terre ?

Claire FORGACZ
Marion GALLART
Hasnia GOUDJILI

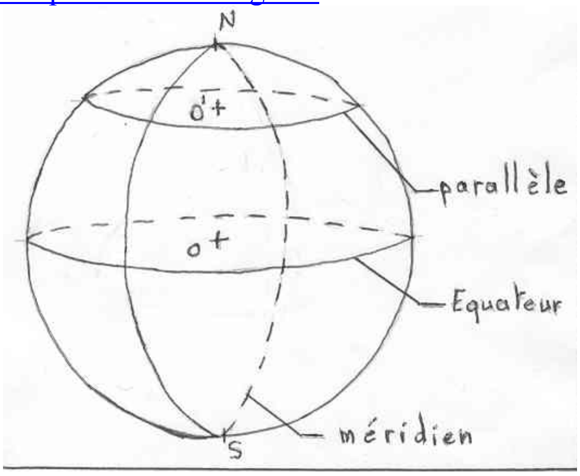
Si l'on se pose la question de savoir comment on peut faire une carte de la Terre c'est parce qu'il est impossible de faire une carte juste de la Terre. En effet, le principe d'une carte est de représenter une surface courbe (la sphère terrestre) sur une surface plane (une feuille de papier). Or, une sphère ne peut être reportée dans un plan sans être déchirée ou altérée. Imaginons, par exemple, que nous pelions une orange en une seule fois et que nous essayons, ensuite, d'aplanir la peau sur une table. La peau se déchirerait sur le côté. Il en est de même pour la sphère terrestre. On ne peut donc pas conserver l'intégralité des propriétés géométriques (angles, distances, surfaces) de la surface à représenter. La méthode de projection retenue constituera donc un choix des caractéristiques à privilégier.

Nous nous sommes ensuite posé deux questions plus précises :
- Pourquoi ne peut-on pas faire une carte juste de la Terre ?
- Peut-on faire une carte qui comporterait le moins d'erreurs possibles ?

1) Pourquoi ne peut-on pas faire une carte juste de la Terre ?

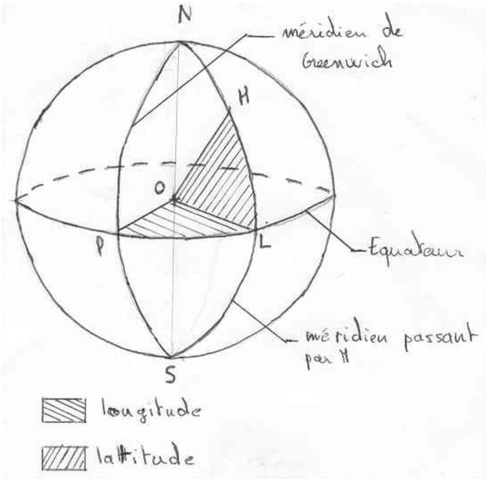
1) Définitions

a) Les lignes particulières du globe.



Equateur : Cercle défini comme l'intersection du plan passant par le centre de la Terre (O) et perpendiculaire à l'axe Nord-Sud et de la sphère. Il partage la Terre en deux hémisphères (Nord et Sud).
Parallèle : Cercle défini par l'intersection d'un plan parallèle à celui de l'équateur et de la sphère terrestre.
Méridien : Cercle dont le centre est le centre de la Terre et qui passe par les deux pôles. On prend, par convention, le méridien de Greenwich pour origine.
On remarque que d'après leurs définitions, il existe une infinité de parallèles et de méridiens, mais on en retient un en particulier tous les dix degrés.

b) Comment repérer un point à la surface de la Terre ?

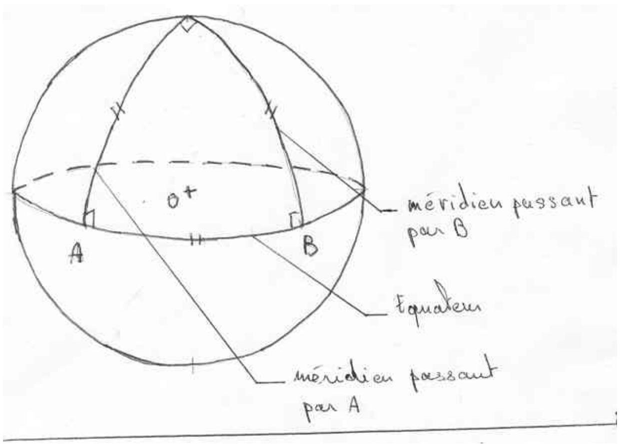


On repère un point à la surface de la Terre grâce à sa latitude et à sa longitude.
Soient H, un point de la surface du globe.
O, le centre de la Terre.
L, l'intersection du méridien passant par M et de l'Equateur.
P, L'intersection du méridien de Greenwich et de L'Equateur.
La latitude est l'angle (OL, OH)
La longitude est l'angle (OP, OL)

2) Problèmes rencontrés

a) Problème de la conservation des angles et des distances

N



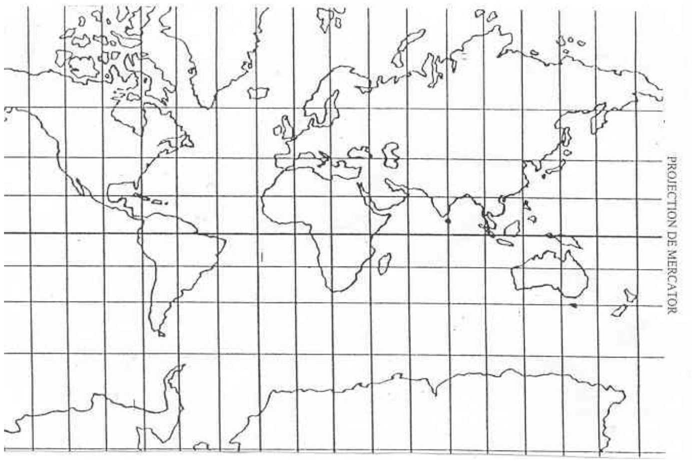
Soient trois points A, B et N du globe tels que A et B appartiennent à l'Equateur, A a pour longitude 0° et B 90°, et N le pôle Nord.

A et B ont une différence de 90° de longitude donc la distance AB = $\frac{1}{4}*2\pi R = \pi R/2$ (R est le rayon de la Terre).
La distance NA est égale à la distance NB et équivaut à un quart de méridien. On a donc
NA = NB = $\frac{1}{4}*2\pi = \pi R/2$
Ainsi, on a NA = NB = AB donc ABN est un triangle équilatéral.

A et B ont une différence de 90˚ de longitude donc AN et BN sont perpendiculaires.
AN et BN sont des portions de méridiens ils sont donc perpendiculaires à l'Equateur.

Ainsi, sur la sphère, on a un triangle équilatéral dont les angles valent 90˚. Or, dans le plan, on ne peut représenter que des triangles équilatéraux dont les angles valent 60˚. On ne peut donc pas conserver les angles et les distances en même temps.

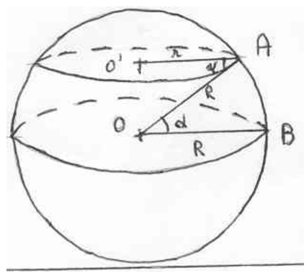
b) Problèmes remarqués sur une carte issue de la projection de Mercator.



La projection équatoriale de Mercator est utilisée pour les mappemondes. Elle inscrit la Terre, ramenée d'abord à une sphère, dans un cylindre tangent à l'Equateur. Ce système comporte donc une double projection, de l'ellipsoïde sur la sphère, puis de la sphère au cylindre.

On remarque visuellement que sur une carte issue de la projection de Mercator, tous les parallèles ont la même longueur (celle de l'Equateur) Qu'en est-il sur la sphère ?
Il s'agit de calculer le périmètre (p) des différents parallèles ce qui nécessite deux étapes :

- On calcule le rayon (r) de chaque parallèle grâce au rayon (R) de la sphère terrestre.



On connaît l'angle α puisqu'il s'agit de la latitude du parallèle, ainsi que la distance OA puisque c'est le rayon de la sphère. Si on se place dans le triangle OAO' rectangle en O', on peut dire que $\cos \alpha = O'A/OA = r/R$ donc $r = R \cos \alpha$.

- On calcule le périmètre (p) du parallèle. Sachant que $p = 2\pi r$, on peut en conclure que

$$p = 2\pi R\cos\alpha$$

On constate que la longueur des parallèles diminue, sur la sphère, au fur et à mesure que l'on s'approche des pôles. Ainsi, nous avons eu l'idée de faire une carte en forme de cercle afin de respecter cette caractéristique.

Nous avons également remarqué que, dans la projection de Mercator, les méridiens sont représentés par des droites perpendiculaires à l'équateur. Or, sur la sphère, les méridiens se rejoignent au niveau des pôles. Nous avons donc pensé à les représenter par des ellipses.

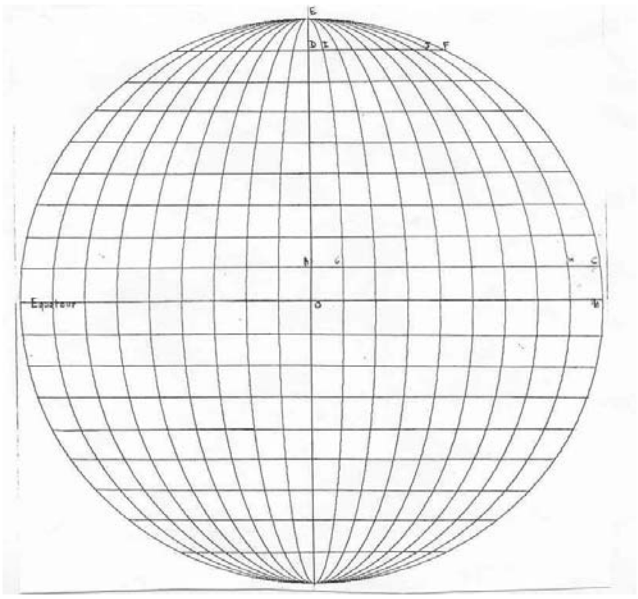
3) Conclusion

Nous avons donc vu que si on ne peut pas faire une carte juste de la Terre c'est, entre autres, parce qu'on ne peut pas conserver les angles et les distances en même temps.

De plus, les observations faites sur la carte issue de la projection de Mercator nous ont permis d'élaborer notre propre système de carte.

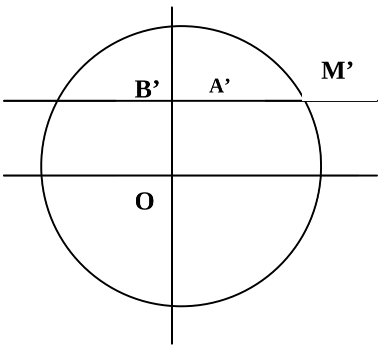
2) Peut-on concevoir une carte qui comporterait le moins d'erreurs possibles ?

1) Description de notre carte



Notre carte est en forme de cercle et on y représente la moitié de la sphère terrestre. Le cercle est centré sur le point O défini comme l'intersection du méridien de Greenwich et de l'équateur. Le rayon de la Terre équivaut à 9 cm sur notre carte. L'axe des abscisses est représenté par l'équateur et celui des ordonnées par le méridien de Greenwich. Ces axes sont gradués en degrés, 1 cm sur notre carte correspond à 10° sur la sphère. (Attention, cette échelle n'est valable que sur les axes).

2) Détermination des formules des coordonnées d'un point sur la carte en fonction de sa latitude et de sa longitude.



Soit A un point de longitude φ et de latitude λ en degrés et A' (x,y) son image sur la carte. B' est l'image sur la carte du point B de latitude λ et de longitude 0. Et M' est le point de la carte d'ordonnée y et qui est sur le cercle qui délimite la carte.

Sur l'axe des ordonnées, 10° correspondent à 1 cm et comme les parallèles sont figurés par des droites, il n'y a pas de transformation de l'échelle même quand on n'est plus sur l'axe des ordonnées. Ainsi, on trouve

$$y = \lambda / 10$$

D'autre part, on a remarqué lors de la construction des méridiens que 10° de longitude correspondait sur notre carte à x = 1/9 d. d étant la distance B'M'.
Donc, en faisant une règle de trois , on montre que pour A de longitude φ, on a $x = (\varphi / 90)*d$
De plus on peut calculer d. En effet, d correspond à l'abscisse de M'. Or M' appartient au cercle délimitant notre carte et qui a pour équation $x^2 + y^2 = 9^2$
Ainsi, on trouve $d = \sqrt{9^2-\lambda^2/100}$ car $y = \lambda/10$.

On obtient donc les formules suivantes : $x = (\varphi/90)*\sqrt{9^2-\lambda^2/100}$
$y = \lambda/10$

3) Représentation des parallèles et des méridiens sur notre carte

a) Les parallèles

Les parallèles sont figurés par des droites parallèles à l'équateur. La distance entre deux parallèles consécutifs, c'est à dire séparés de 10°, est toujours la même au niveau de l'axe des ordonnées et vaut 1cm.

b) Les méridiens

Nous avons représenté les méridiens par des ellipses dont nous avons trouvé les équations grâce aux formules des coordonnées d'un point sur notre carte.

Démonstration : soit $C = \varphi^2/90^2$
D'après la formule des abscisses $x^2 = (\varphi^2/90^2)*(9^2-\lambda^2/100) = C(9^2-\lambda^2/100)$
Donc $x^2 + Cy^2 = C9^2$
Par division par C, on obtient l'équation de l'ellipse :

$$x^2/C + y^2 = 9^2 \quad \text{avec} \quad C = (\varphi/90)^2$$

Vérifions cette équation pour un méridien de longitude $\varphi = 20°$
On a $(90/\varphi)^2x^2 + y^2 = 9^2$
$(90/20)^2x^2 + y^2 = 9^2$
On obtient donc l'équation : $(81/4)x^2 + y^2 = 9^2$

Résultats :

LONGITUDE	EQUATION DU MERIDIEN
10°	$81x^2 + y^2 = 9^2$
20°	$(81/4)x^2 + y^2 = 9^2$
30°	$9x^2 + y^2 = 9^2$
40°	$(81/16)x^2 + y^2 = 9^2$
50°	$(81/25)x^2 + y^2 = 9^2$
60°	$(27/12)x^2 + y^2 = 9^2$
70°	$(81/49)x^2 + y^2 = 9^2$
80°	$(81/64)x^2 + y^2 = 9^2$
90°	$x^2 + y^2 = 9^2$

4) Notre carte est-elle juste ?

a) Déformation verticale

- Soient O(0,0) : intersection du méridien de Greenwich et de l'équateur
  A(1,0) : intersection du méridien de Greenwich et du parallèle 10°N.
  B(9,0) : intersection du méridien 90°W et de l'équateur.
  C(X_c,1) : intersection du méridien 90°W et du parallèle 10°N.

Recherche de l'abscisse de C : C appartient au méridien 90°W donc ses coordonnées vérifient l'équation $X_C^2 + Y_C^2 = 9^2$ donc $X_C^2 = 9^2 - Y_C = 9^2 - 1^2 = 80$ donc $X_C = \sqrt{80}$

Sur la carte : OA = 1 cm $BC = \sqrt{[(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]}$
$= \sqrt{[(\sqrt{80}-9)^2 + (1-0)^2]} = \sqrt{1.003}$ donc OA ≈ BC

Sur la sphère : en utilisant la formule des arcs de cercles on obtient : OA = BC = $(10\pi/180)R$

Donc, au niveau de l'équateur, la distance entre deux parallèles consécutifs est pratiquement respectée.

- Soient D(0,8) : intersection du méridien de Greenwich et du parallèle 80°N
  E(0,9) : pôle Nord
  F(X_F,8) : intersection du méridien 90°W et du parallèle 80°N

Recherche de l'abscisse F : F appartient au méridien 90°W donc ses coordonnées vérifient l'équation : $X_F^2 + Y_F^2 = 9^2$
donc $X_F^2 = 9^2 - Y_F^2 = 9^2 - 8^2 = 17$ donc $X_F = \sqrt{17}$

Sur la carte : DE = 1 cm $EF = \sqrt{[(X_F – X_E)^2 + (Y_F – Y_E)]}$
$= \sqrt{[(\sqrt{17}-0)^2 + (8-9)^2]} = \sqrt{18} = 4.24$ cm
donc EF est très supérieur à DE

Sur la sphère : En utilisant la formule des arcs de cercle on obtient DE = EF = $(10\pi/180)R$

Ainsi, notre carte subit une déformation verticale.

b) Déformation horizontale

Nous avons construit notre carte de telle sorte qu'il y ait toujours la même distance entre deux méridiens consécutifs au niveau d'un même parallèle. Donc, par définition, il n'y a pas de déformation horizontale.

c) Conclusion

Ainsi, nous avons montré que même s'il n'y a pas de déformation horizontale, il y a tout de même une déformation verticale importante. Donc, notre carte est fausse.

Cependant, comme notre carte a une déformation minime au niveau de l'équateur, on pourrait imaginer utiliser ce procédé sur une bande réduite et centrée sur l'équateur. Ensuite, on ferait de même en centrant la carte sur un parallèle. On obtiendrait une carte entière de la Terre en superposant les différentes cartes obtenues.

3) Conclusion

Pour conclure, on peut dire que, grâce à notre projet, nous avons pu constater que le sujet que nous avions abordé est très vaste. D'ailleurs, même en restreignant le sujet à deux problématiques précises, nous n'avons pas pu les voir dans leur totalité. Par exemple, pour étudier la fausseté de notre carte nous n'avons utilisé que les distances alors que nous aurions pu également étudier les angles et les surfaces.

Cependant, on peut tout de même considérer que le bilan de notre travail est positif puisque nous avons réussi, à notre niveau, à donner quelques éléments de réflexion concernant nos problématiques (Pourquoi ne peut-on pas faire une carte juste de la Terre ? et Peut-on faire une carte qui comporterait le moins d'erreurs possibles ?) qui nous ont permis d'y répondre.
Enfin, nous avons appris au congrès de « Maths en Jeans » à L'Université Paris-Sud d'Orsay, que notre carte existait déjà. En effet, il s'agit d'une carte élaborée par des mathématiciens du 16$^{\text{ième}}$ siècle. Cette anecdote nous a rassuré en ce qui concerne la pertinence de nos idées.