Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Carrés Magiques

année 2012-2013

Elèves chercheurs :
Thomas Beudin, Laury Boulet, Angelo Ceriana, Delphine Deneux, Mathieu Deneux, Steeven Jacquart
Collège Jean Jaurès,
rue du 8 mai 1945
59690 **Vieux-Condé**

Enseignant :
Nicolas Vanlancker

Chercheur :
Sylvie Derviaux
LAMAV EA 4015, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

« Un carré magique d'ordre *n* est composé de n^2 cases, comportant une et une seule fois les nombres de 1 à n^2 disposés de telle façon que la somme sur les diagonales, les lignes et les colonnes soit toujours le même nombre. »
Par exemple, le carré ci-dessous est un carré magique d'ordre 5.

5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20
6	15	19	23	2
18	22	1	10	14

Il comporte 5 lignes, 5 colonnes soit 25 cases, comportant tous les nombres de 1 à 25. Si on additionne les nombres situés sur une même ligne, ou une même colonne, ou sur la diagonale, on trouve toujours 65. On dira que la somme S de ce carré est 65.

Madame Derviaux nous a demandé de garder cette définition précise du carré magique[1], et de répondre aux questions suivantes :

- trouver tous les carrés magiques d'ordre 3
- trouver tous les carrés magiques d'ordre 4
- trouver une méthode qui permette de construire des carrés magiques d'ordre pair (plus grand que 2)
- peut-on additionner deux carrés magiques ?

<u>I Trouver tous les carrés magiques d'ordre 3</u>

On veut construire un carré magique d'ordre 3, c'est à dire un carré de 3 sur 3, dans lequel on doit inscrire les nombres de 1 à 9.

La somme de tous les nombres de 1 à 9 vaut 45. Mais cette somme est à répartir en 3 (puisque les nombres vont se trouver sur 3 lignes, ou 3 colonnes dont la somme des nombres est égale). **<u>La somme d'un carré magique d'ordre 3 est donc 15</u>** (un tiers de 45).

Le nombre 5 se trouve toujours dans la case du centre du carré.
Pour trouver cela, on a essayé avec tous les nombres et on a montré qu'il y a un problème

1 Car il en existe d'autres moins rigoureuses.

dès qu'un autre nombre que 5 se trouve dans la case du centre.

Par exemple, si on met le 1 au centre, il se trouvera obligatoirement sur la même ligne, la même colonne ou la même diagonale que le 2. Pour trouver 15, il faut alors ajouter 12 et il ne reste qu'une seule case de libre sur cette ligne. Ce n'est pas possible !

2	1	?

Autre exemple, si on met le 9 au milieu, il se trouvera obligatoirement sur la même ligne, la même colonne ou la même diagonale que le 8. A deux, ils font déjà 17 et il reste une case à compléter. Ce n'est pas possible.

8	9	?

On peut tenir le même raisonnement pour tous les nombres autres que 5. Donc 5 se trouve au centre du carré.

7, 8 et 9 ne peuvent pas être à deux sur la même ligne. En effet, la somme atteindrait déjà 15 et il resterait encore un troisième nombre à placer. Ils doivent donc occuper l'une des trois places représentées par des points (bleus). (1)

	.	
.	5	
		.

9 ne peut pas se trouver sur la diagonale. S'il est sur le point situé sur la diagonale, le nombre 1 complète la diagonale.

1	.	
.	5	
		9

1 est donc sur la même ligne (ou colonne) que le 7 (situé sur un autre point). 7+1=8 et 15-8=7 la case manquante est donc un 7. Mais ce carré aurait deux 7. Impossible !

On place donc le 9 sur l'un des 2 points en dehors de la diagonale.

Le 7 ne peut pas se placer sur la diagonale.

En le plaçant ainsi, on aboutit à un problème : il y aurait deux nombres 3.

3	8	
9	5	
3		7

Le 7, le 8 et le 9 sont maintenant placés sur les 3 points, le 8 sur la diagonale. Il nous reste à compléter en faisant des sommes égales à 15.
On obtient le carré magique suivant :

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Les 3 points initiaux (sur lesquels vont être placés le 7, le 8 et le 9) peuvent être placés de plusieurs manières :

- le point sur la diagonale dans chacun des quatre coins.
- A chaque fois, la position du 7 et du 9 peuvent être échangés.

On obtient donc finalement les 8 carrés magiques d'ordre 3 suivants :

On remarque que les 8 carrés magiques s'obtiennent les uns à partir des autres soit par rotation soit par symétrie centrale (axe horizontal, vertical ou diagonal).

II Formule générale pour le calcul de la somme

Dans un carré d'ordre n, il y a tous les nombres de 1 à n². Si on les additionne, on trouve 1 + 2 + … + n². On trouve le même résultat sur n lignes. Pour trouver la somme, on doit donc diviser par n.

Dans un carré d'ordre n, la somme d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale fait donc :

$$S=\frac{1+2+3+...+n^2}{n}$$

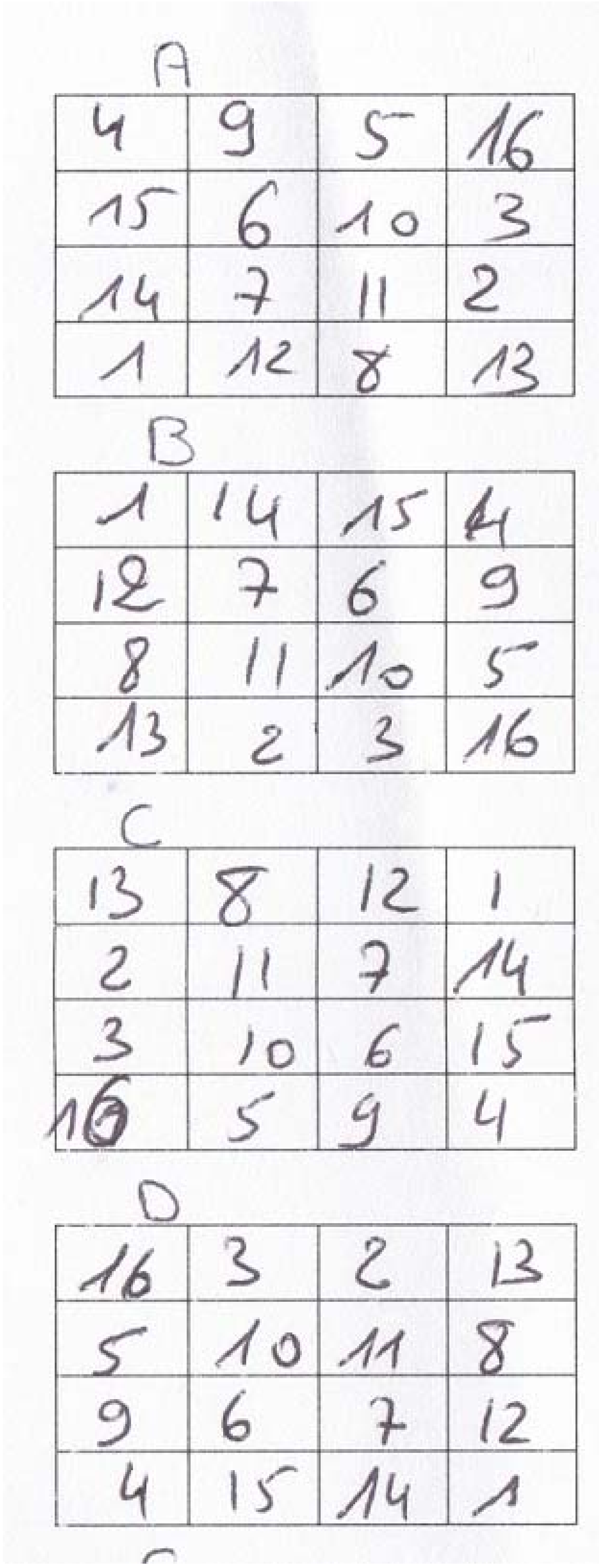
III Carrés magiques d'ordre 4

La somme S d'un carré magique d'ordre 4 vaut $\frac{1+2+3+\ldots+16}{4}=34$. On a donc cherché des carrés magiques d'ordre 4. Nous en avons trouvé 3 différents :

4	9	5	16
15	6	10	3
14	7	11	2
1	12	8	13

1	16	11	6
13	4	7	10
8	9	14	3
12	5	2	15

16	5	11	2
4	7	9	14
1	10	8	15
13	12	6	3


A

4	9	5	16
15	6	10	3
14	7	11	2
1	12	8	13

B

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

C

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
16	5	9	4

D

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Madame Derviaux nous a alors conseillé de ne pas chercher tous les carrés magiques d'ordre 4 mais plutôt de trouver tous les carrés possibles à partir du premier qu'on a trouvé.

Nous nous sommes souvenus que les carrés magiques d'ordre 3 s'obtenaient les uns par rapport aux autres par symétrie ou par rotation.

On reprend donc notre premier carré magique d'ordre 4 (le A) et on le fait tourner trois fois d'un quart de tour. On obtient trois nouveaux carrés magiques (B, C et D).

Ensuite pour chacun des quatre carrés magiques, on a effectué les différentes symétries axiales, par rapport à un axe horizontal, par rapport à un axe vertical, par rapport à une diagonale et par rapport à l 'autre diagonale.
Nous avons donc trouvé 16 nouveaux carrés magiques : A_1, A_2, A_3, A_4, B_1...

Nous avons constaté que plusieurs d'entre eux sont identiques.

Finalement, à partir d'un carré magique, on se rend compte qu'on peut en construire huit différents (en reprenant nos notations : A, B, C, D, A_1, A_2, A_3 et A_4)

IV Une constatation à propos des carrés d'ordre 4

Nous avons remarqué que dans tous les carrés magiques d'ordre 4 que nous avons trouvés, la somme des quatre cases centrales fait 34.
Nous n'avons pas pu le prouver.

V Une méthode pour construire les carrés magiques d'ordre pair (à partir de 4)

Nous avons trouvé une méthode pour construire des carrés magiques d'ordre pair de manière assez mécanique.

Nous allons expliquer la méthode sur un carré magique d'ordre 6.
Nous commençons par calculer la somme.
Donc pour connaître la somme du carré magique d'ordre 6 on calcule :

$$\frac{1+2+3+.........+36}{6}=111$$

Pour commencer le carré magique d'ordre 6, on place les nombres de 1 à 36 dans chaque case, dans l'ordre croissant.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Ensuite, on calcule la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale. On écrit les résultats sur les bords du carré magique.

	1	2	3	4	5	6	21
	7	8	9	10	11	12	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	31	32	33	34	35	36	201
111	96	102	108	114	120	126	111

On se rend compte que la somme sur chaque diagonale fait déjà 111. Il n'y a pas besoin de toucher aux chiffres placés sur les diagonales. On a colorié ces cases en rouge.

	1	2	3	4	5	6	21
	7	8	9	10	11	12	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	31	32	33	34	35	36	201
111	96	102	108	114	120	126	111

Ensuite on a calculé la distance à 111 sur chaque ligne.

								diff à 111
	1	2	3	4	5	6	21	90
	7	8	9	10	11	12	57	54
	13	14	15	16	17	18	93	18
	19	20	21	22	23	24	129	-18
	25	26	27	28	29	30	165	-54
	31	32	33	34	35	36	201	-90
111	96	102	108	114	120	126	111	

On s'est rendu compte que sur la première ligne il manque 90 et que sur la dernière ligne il y a 90 en trop. Nous avons donc échangé des nombres 2 à 2 entre la première ligne et la dernière, sans les changer de colonne, afin d'enlever les 90 en trop de la dernière ligne pour les mettre dans la première. Évidemment, nous ne pouvons pas toucher aux nombres des diagonales (ceux en rouge).
Nous avons échangé le 3 avec 33, le 4 avec le 34 et le 5 avec le 35.

								diff à 111
	1	2	33	34	35	6	111	0
	7	8	9	10	11	12	57	54
	13	14	15	16	17	18	93	18
	19	20	21	22	23	24	129	-18
	25	26	27	28	29	30	165	-54
	31	32	3	4	5	36	111	0
111	96	102	108	114	120	126	111	

On fait de même pour toutes les lignes (dont les sommes s'arrangent deux à deux). On obtient le carré suivant :

								diff à 111
	1	2	33	34	35	6	111	0
	25	8	9	28	11	30	111	0
	19	20	15	16	23	18	111	0
	13	14	21	22	17	24	111	0
	7	26	27	10	29	12	111	0
	31	32	3	4	5	36	111	0
111	96	102	108	114	120	126	111	

Ensuite, on calcule la distance à 111 pour la somme de chacune des colonnes.

	1	2	33	34	35	6	111
	25	8	9	28	11	30	111
	19	20	15	16	23	18	111
	13	14	21	22	17	24	111
	7	26	27	10	29	12	111
	31	32	3	4	5	36	111
111	96	102	108	114	120	126	111
diff à 111	15	9	3	-3	-9	-15	

On se rend compte qu'une nouvelle fois, les distances se complètent deux à deux. On peut donc intervertir des nombres entre 2 colonnes (en les prenant dans la même ligne) (2)
afin de rendre les sommes égales à 111.

Finalement, on a obtenu la somme de 111 sur toutes les lignes, toutes les colonnes et sur les deux diagonales. On obtient donc un carré magique d'ordre 6.

1	5	33	34	32	6
30	8	28	9	11	25
18	20	15	16	23	19
24	17	21	22	14	13
7	26	10	27	29	12
31	35	4	3	2	36

Cette méthode permet d'obtenir un carré magique d'ordre 6. Nous l'avons testé avec un carré magique d'ordre 4 et d'ordre 8. Nous supposons qu'elle fonctionne pour tous les ordres pairs plus grands que 2.

VI Ajouter deux carrés magiques

Le dernier travail proposé par Madame Derviaux était de regarder si la somme de deux carrés magiques est un carré magique.
Pour ajouter deux carrés magiques, on prend deux carrés magiques de même ordre. Par exemple :

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

On ajoute alors la première case du premier carré et la première du deuxième carré et on inscrit le résultat dans la première case du carré « somme »...

On obtient le carré suivant :

6	12	12
16	10	4
8	8	14

On remarque que le carré somme n'est pas un carré magique car les résultats ne sont pas compris entre 1 et 9. Parfois, des nombres sont présents plusieurs fois.
Mais nous avons vu que dans le carré somme, les lignes, les colonnes et les diagonales font toutes 30 (pour un carré d'ordre 3). Ceci s'explique car, ajouter les nombres de la première ligne (par exemple) du carré somme revient à ajouter les nombres de la première ligne de chacun des deux carrés termes.
Nous avons appelé de tels carrés des carrés « miraculeux ».

Notes d'édition

(1) A l'aide d'une rotation ou d'une symétrie, on peut toujours se ramener à ce cas, comme c'est expliqué à la page suivante .

(2) De cette façon, on ne modifie pas la somme sur les lignes .