du carré à l'escalier

par M. Dorian Famibelle, M. Julien Ta et M. Kam-Hung Tang, élèves de 5° du **collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)**, établissement jumelé avec le **collège Anne Frank de Bussy St Georges (77)**

enseignant :
M. Pierre Lévy

chercheur :
M. Olivier Bodini

coordination article : TA Julien

Pas de compte-rendu de parrainage.

N — La forme des nombres : du carré à l'escalier. 2

Une boîte carrée contient des cubes identiques disposés sur une seule couche. On désire utiliser tous ces cubes pour fabriquer un "escalier". A quelles conditions est-ce possible ?

Présentation du sujet

On dispose d'une boîte carrée dans laquelle sont rangés des cubes sur une seule couche. Avec ces cubes, on va essayer de fabriquer un escalier.

Par exemple si on dispose d'une boîte de trois cubes sur trois c'est-à-dire de 9 cubes en tout, on ne peut pas fabriquer l'escalier suivant qui contient 10 cubes. Si on enlevait un étage à cet escalier, il ne contiendrait plus que 7 cubes. Donc avec une boîte carrée de 9 cubes, on ne peut pas fabriquer d'escalier.

figure 1.— les nombres en carrés et en escaliers.

Quelles sont les boîtes carrées qui permettent d'obtenir des escaliers ?

Quel est le nombre de cubes dans une boîte carrée ?

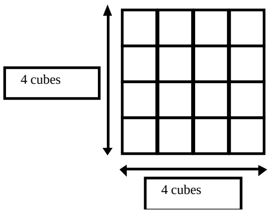


figure 2.— quel est le nombre de cubes dans une boîte carrée ?

Le nombre de cubes d'une boîte carrée de 4 cubes sur 4 est 4×4 que l'on écrit 4^2.

Quel est le nombre de cubes dans un escalier ?

On a décidé de numéroter les étages en commençant par le haut car il y a le même nombre de cubes dans chaque marche que l'étage où elle se trouve. Le nombre de cubes dans cet escalier se calcule de la manière suivante :

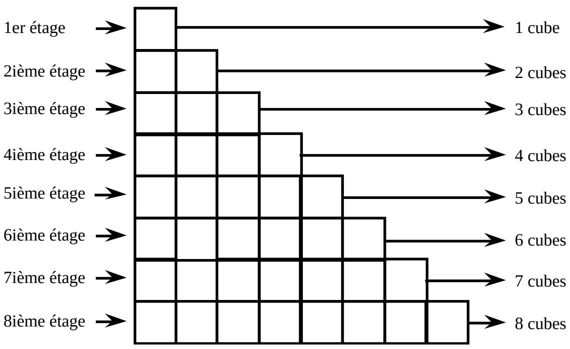


figure 3.— quel est le nombre de cubes dans un escalier ?

Le nombre de cubes dans cet escalier est :

$$\boldsymbol{E_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}$$

c'est-à-dire $\boldsymbol{E_8 = 36}$**.**

On trouve ici : $E_1 = 36$. Le problème est qu'évidement ce calcul est bien trop long. Pour un escalier de vingt étages, il faut calculer :

1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12 +13 +14 +15 +16 +17 +18 +19 +20 !!!!!

une première idée
pour simplifier les calculs

On double la hauteur.

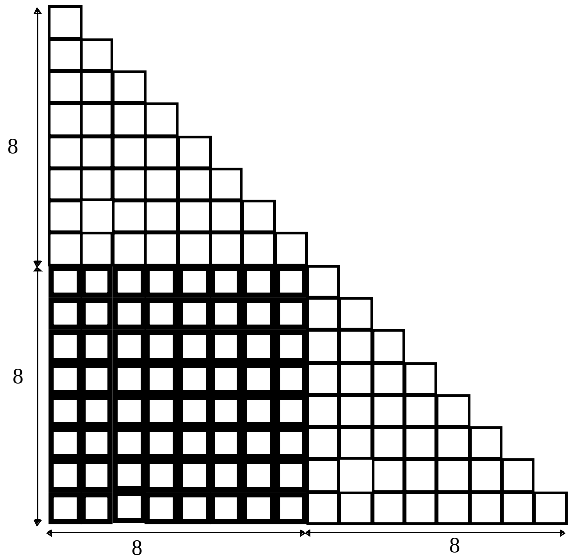


figure 4.— on double le nombre d'étages.

On remarque qu'en doublant la hauteur (on passe de 8 étages à 16 étages), l'escalier obtenu est composée d'un carré de 8 sur 8 et de deux escaliers identiques de huit étages. Le nombre de cubes s'obtient par ce calcul :

$$E_{16} = (8 \times 8) + (2 \times 36)$$

8×8 est le nombre de cubes dans le carré et 2×36 le nombre de cubes dans les deux escaliers de 8 étages.

$$E_{16} = 136$$

Le résultat a été trouvé en trois opérations au lieu de calculer la somme de 1 à 16.

On ajoute un nombre d'étages au hasard.

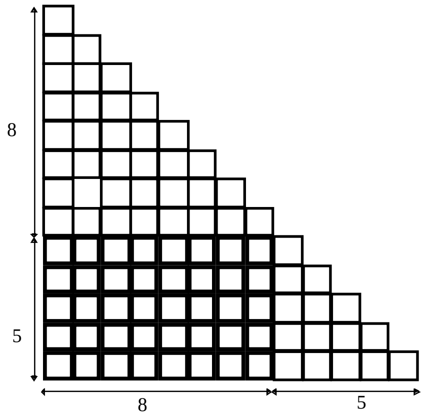


figure 5.— si on ajoute 5 étages.

On ajoute cinq étages par exemple, à notre escalier de huit étages. Le nouvel escalier est composé d'un rectangle de 5 sur 8, de notre escalier initial de huit étages et d'un escalier de cinq étages. Le nombre de cubes s'obtient donc facilement si on connaît le nombre de cubes d'un escalier de cinq étages :

$$E_{13} = (8 \times 5) + E_8 + E_5 = 91$$
$$E_{13} = (8 \times 5) + 36 + 15 = 91$$

8×5 est le nombre de cubes dans le rectangle, 36 le nombre de cubes pour l'escalier de huit étages et 15 pour l'escalier de cinq étages.

Tableau des premiers résultats

En utilisant ces méthodes, nous sommes parvenus à calculer le nombre de cubes dans une boîte carrée de 87 cubes de côté et dans un escalier de 87 étages.

Voici nos premiers résultats. (voir le tableau).

hauteur	nombre de cubes dans l'escalier	nomb. de cubes dans le carré
2	3	4
3	6	9
4	10	15
5	15	25
6	21	**36**
7	28	49
8	**36**	64
9	45	81
10	55	100
11	66	121
12	78	144
13	91	169
14	105	196
15	120	225
16	136	256
17	153	289
18	171	324
19	190	361
20	210	400
21	231	441
22	253	484
23	270	529
24	300	576
25	325	625
26	351	676
27	378	729
28	406	784
29	435	841
30	465	900
31	496	961
32	528	1024
33	561	1089
34	595	1156
35	630	**1225**
36	666	1296
37	703	1369
38	741	1444
39	780	1521
40	820	1600
41	861	1681
42	903	1764
43	946	1849
44	990	1936
45	1035	2025
46	1085	2116
47	1128	2209
48	1176	2304
49	**1225**	2401
50	1275	2500
51	1326	2601
52	1378	2704
53	1431	2809
54	1485	2916
55	1540	3025
56	1596	3136
57	1653	3249
58	1711	3364
59	1770	3481
60	1830	3600
61	1891	3721
62	1953	3844
63	2016	3969

On voit que les nombres carrés qui donnent un escalier sont rares. Pour le moment il n'y en a que trois : **1**, **36** et **1225**.

Formule permettant de trouver directement le nombre de cubes dans un escalier.

En manipulant nos escaliers, nous avons eu une idée pour calculer très simplement le nombre de cubes qu'il contient. Reprenons notre escalier de huit étages.

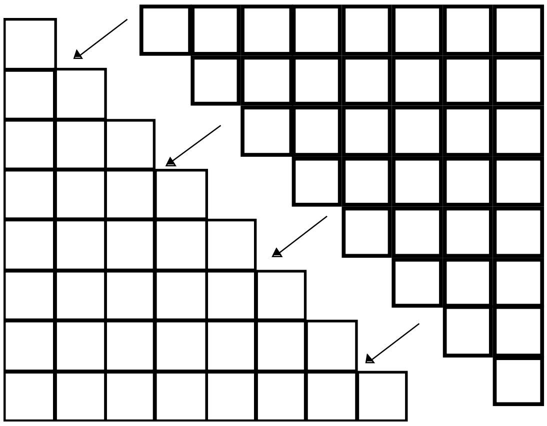


figure 6.— méthode pour trouver directement le nombre de cubes dans un escalier.

On prend un deuxième escalier identique (en gras sur le dessin). En les assemblant on obtient un rectangle de 8 cubes sur 9.

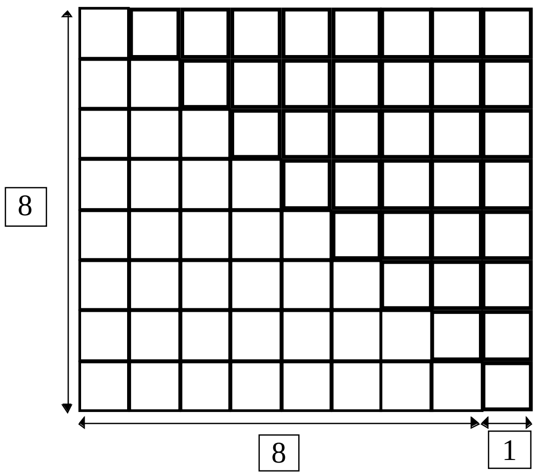


figure 7.

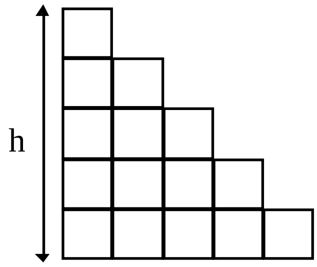
Le nombre de cubes du rectangle est 8 (8 +1). Le nombre de cube de l'escalier est donc la moitié c'est-à-dire

$$\frac{8 \times (8 + 1)}{2}.$$

On retrouve 36 cubes.

La formule générale est donc la suivante :

☞ **Règle générale :**



si h est la hauteur de l'escalier, le nombre de cubes est :

$$\frac{h \times (h + 1)}{2}.$$

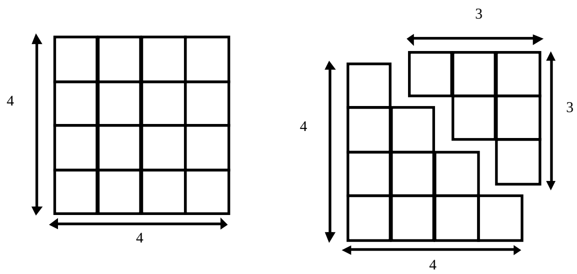
figure 8.

[NDLR : Un peu refroidis par la rareté des nombres à la fois escaliers et carrés, les élèves ont choisi d'explorer les nombres rectangles. Cela laisse énigmatique la question suivante : y a-t-il une infinité de nombres qui sont à la fois escaliers — c'est-à-dire de la forme $h \times (h + 1) / 2$ — et carrés — c'est-à-dire des la forme $n \times n$?]

Les nombres rectangles.

La méthode pour trouver cette formule nous a donné l'idée de chercher si n'importe quel rectangle pouvait se découper en escaliers.

Il est facile de voir que pour les carrés cela est vrai. En effet, un carré est toujours composé de deux escaliers dont l'un a un étage de moins que l'autre.



figures 9.— découpage d'un carré en deux escaliers.

Avec les rectangles, cela ne sera pas toujours possible avec deux escaliers : il restera parfois une « bande » ou un cube isolé (voir les trois exemples, figures 10). [NDLR : un cube isolé n'est pas considéré ici comme un escalier.]

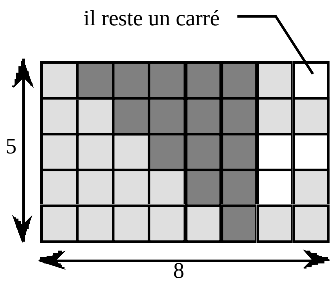


figure 10.1.— découpage d'un rectangle en escaliers.

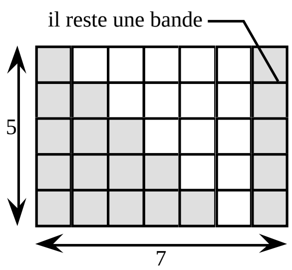


figure 10.2.— découpage d'un rectangle en escaliers.

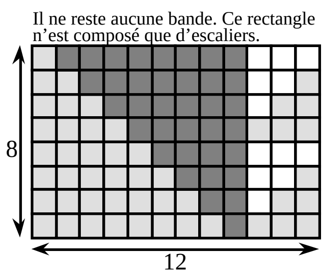


figure 10.3.— découpage d'un rectangle en escaliers.

Voici notre méthode de découpage : prenons un rectangle de 8 sur 12. Nous savons déjà que tout rectangle de largeur h et de longueur $h + 1$ se découpe en deux escaliers identiques. Il est donc facile de découper ce rectangle en deux rectangles : l'un de 8 sur 9 (qui est composé de deux escaliers identiques) et l'autre de 3 sur 8. Il suffit alors de recommencer la même opération avec le deuxième rectangle et ainsi de suite … Dans cet exemple, le deuxième rectangle est composé de quatre escaliers identiques. Un rectangle de 8 sur 12 est donc composé de six escaliers.

Voici quelques exemples obtenus avec cette méthode. Cependant, nous pouvons prévoir à l'avance si le rectangle est découpable ou pas. Pour cela, on divise la longueur par la largeur plus 1 et on s'occupe du reste.

On peut avoir plusieurs possibilités :

• pour un rectangle de 5 sur 17 :
17 ÷ (5+1) = 2 et il reste 5. Ce rectangle est composé d'un rectangle de 5 sur 6 et d'un carré de 5. On obtient donc quatre escaliers en tout.

• pour un rectangle de 21 sur 44 :
44 ÷ (21+1) = 2 et il reste 0. Ce rectangle est composé de 2 rectangles de 21 sur 22. On obtient donc quatre escaliers identiques en tout.

• pour un rectangle de 13 sur 23 :
23 ÷ (13+1) = 1 et il reste 9. Ce rectangle est composé d'un rectangle de 13 sur 14 et d'un rectangle de 13 sur 9.

13 ÷ (9 + 1) = 1 et il reste 3. On a deux nouveaux rectangles : un de 9 sur 10 et un de 9 sur 3.

9 ÷ (3 + 1) = 2 et il reste 1. Il reste donc une « bande » de 9 sur 1. Le reste du rectangle est décomposé en six escaliers.

[NDLR : Cette étude pose plusieurs questions intéressantes :
• Quels sont les rectangles sur lesquels la méthode de découpage proposée ci-dessus réussit, c'est-à-dire ne laisse aucun cube isolé ou de bande de largeur 1 ?

• Les découpages obtenus ici comportent toujours un nombre pair d'escaliers. Existe-t-il un rectangle qu'on peut découper en un nombre impair d'escaliers ?
• Quel est, pour un rectangle donné, le nombre **minimum** d'escaliers qui permet un découpage de ce rectangle (on peut ici autoriser les escaliers formés d'un seul cube) ?]

Les escaliers formés avec des carrés.

Pour terminer notre étude, nous avons eu l'idée de construire des escaliers à l'aide de carrés successifs. Nous les appellerons des « escaliers carrés ». En voici un exemple :

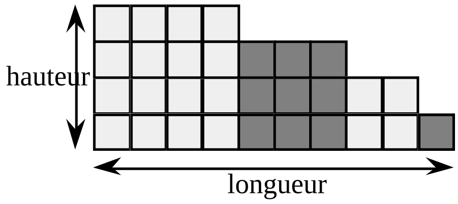


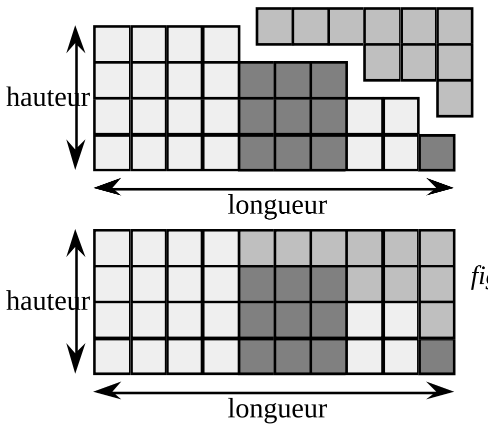
figure 11.

Comment compter le nombre de cubes qu'ils contiennent ? Pour cela, il nous faut calculer l'expression suivante :

$$C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + N^2$$

où N est la hauteur de l'escalier.

Nous avons cherché un moyen pour simplifier ce calcul. Nous avons tenté d'utiliser la même stratégie que pour les « vrais » escaliers : on complète l'escalier-carré par un autre escalier de manière à obtenir un rectangle.



figures 12.

On compte le nombre de cubes dans le rectangle et on retranche le nombre de cubes qui sont en trop.

Une question ouverte.

Hélas, le problème est plus complexe que dans le cas des vrais escaliers et nous n'avons pas réussi, faute de temps, à trouver une manière rapide et simple d'obtenir le résultat. Peut-être que cela intéressera d'autres camarades l'an prochain …