Ça roule à Saint-Orens

Année 2007

Claire Hévin-Zaccaron
Maxime Collodel
Maxime Mametsa
Bastien Mesquida
Clémentine Delarue

Tous en seconde au lycée P.P. Riquet de Saint-Orens.

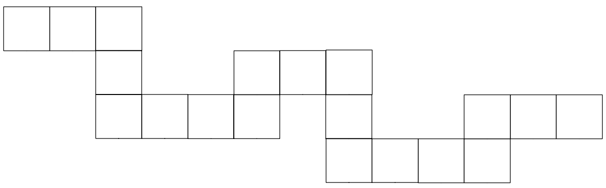
Sujet:

Notre recherche a consisté à déterminer les régions du plan accessibles lorsque l'on fait pivoter des polyèdres réguliers autour de leurs arêtes.

Nous avons étudié l'évolution de la zone accessible en fonction du nombre et de la position des faces auxquelles on a interdit de toucher le plan .

Exemple avec le cube :

- Que se passe-t-il lorsque l'on fait pivoter un cube ?
  On imagine aisément que l'on peut parcourir n'importe quel réseau tel que celui ci :



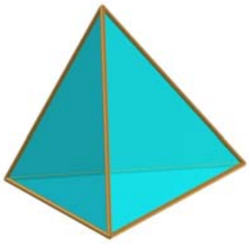
- Que se passe-t-il si l'on interdit à 1 face de toucher le plan ?
  Peut-on encore accéder à toutes les positions ?
- À 2 faces de toucher le plan ?
- Et pour les autres polyèdres réguliers ?

Présentation des 5 polyèdres réguliers :

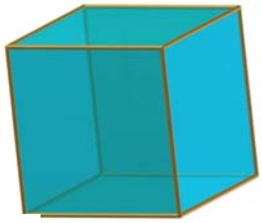
Un polyèdre est régulier lorsque il possède toutes ses faces identiques composées de polygones réguliers et que tous ses sommets sont équivalents (1)

Il existe 5 polyèdres réguliers :

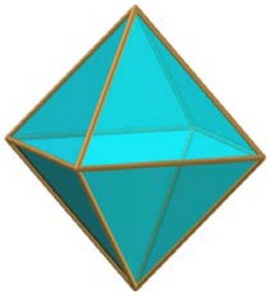
- Le tétraèdre: 4 faces, 6 arêtes, 4 sommets



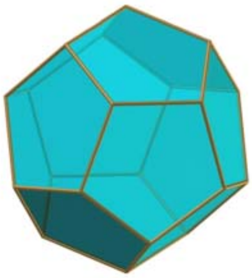
Le cube: 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets



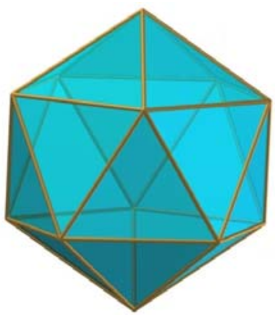
- L'octaèdre: 8 faces, 12 arêtes, 6 sommets



- Le dodécaèdre: 12 faces, 30 arêtes, 20 sommets



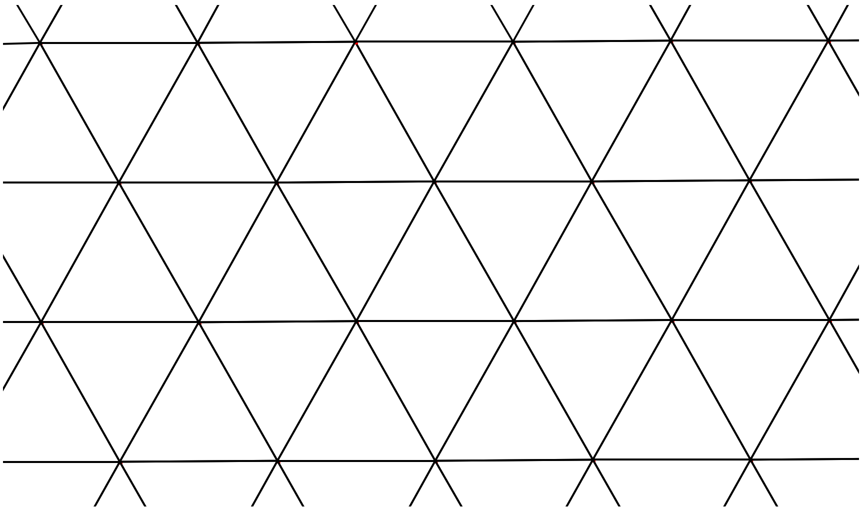
- L'icosaèdre: 20 faces, 30 arêtes, 12 sommets



I. Le tétraèdre

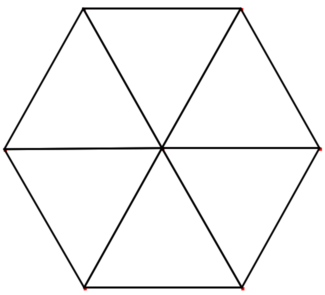
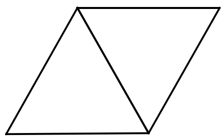
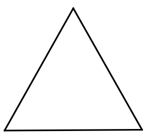
Le tétraèdre possède 4 faces étant des triangles équilatéraux.

- Le tétraèdre se déplace sur ce réseau, composé de triangles équilatéraux:

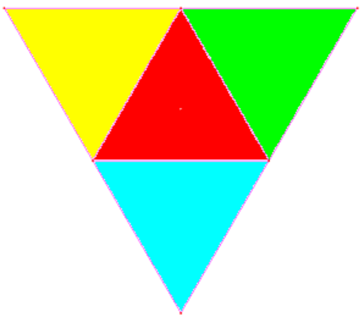


Ce réseau est illimité

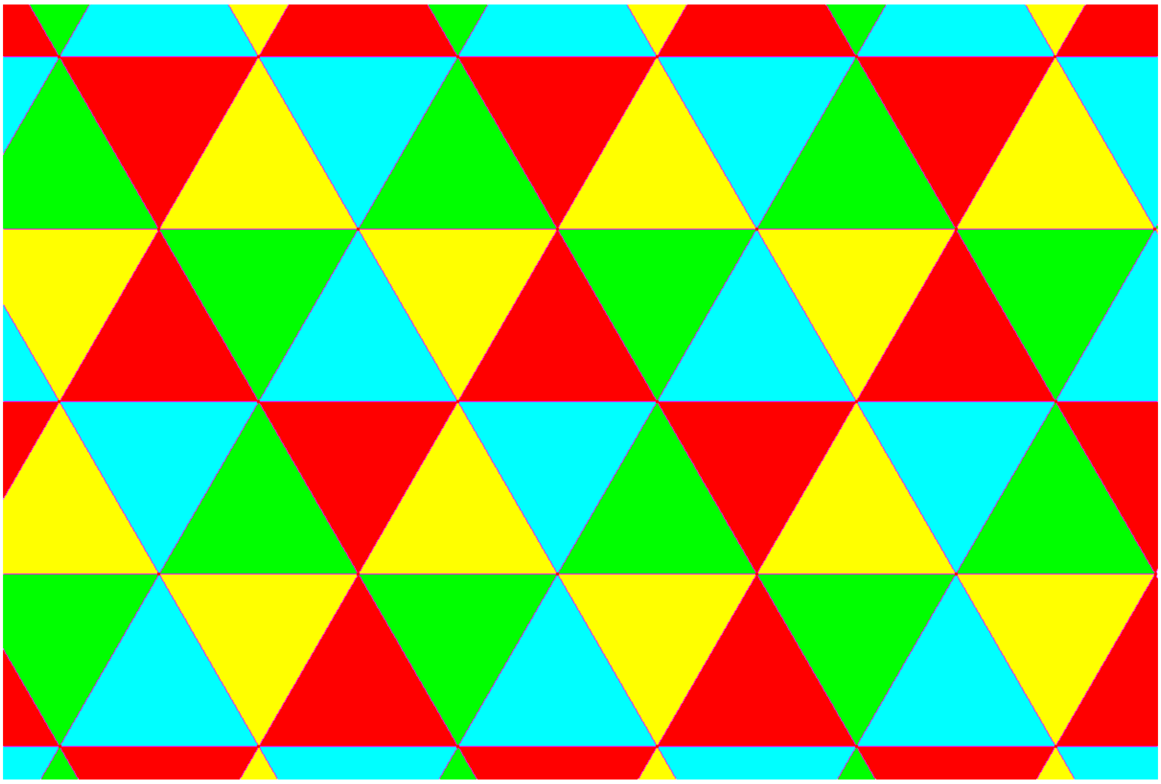
- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit éventuellement

1 face interdite : on obtient un hexagone	2 faces adjacentes interdites : un losange	3 faces interdites : la face de départ
		

Etudions maintenant sur quelle face nous retombons lorsque l'on fait pivoter le tétraèdre. Pour cela prenons un tétraèdre dont les faces sont de couleurs différentes. Nous obtenons le début du réseau :



Nous obtenons alors le réseau coloré suivant :



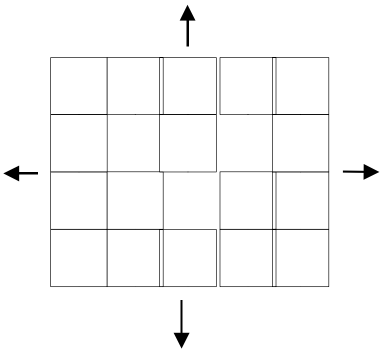
Nous pouvons faire l'observation suivante :

Il est impossible de tomber sur une face autre que celle prévue sur le réseau. On peut ainsi savoir où tombera l'une des faces du tétraèdre.
C'est-à-dire que une face du tétraèdre ne peut « tomber » que sur une face de même couleur du réseau. (2)

II. Le cube

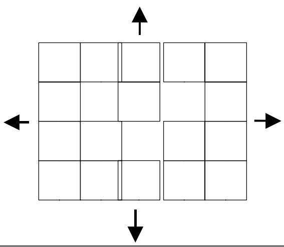
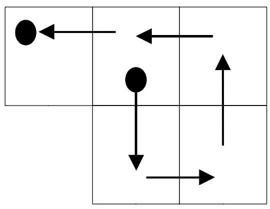
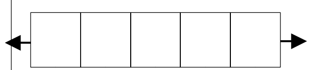
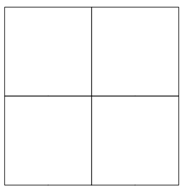
Nous avons observé ce qu'il se passe lorsque l'on fait rouler un cube sur ses arêtes.

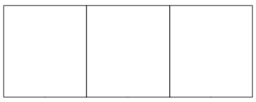
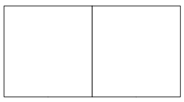
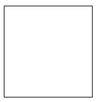
- Le cube se déplace sur un réseau, composé de carrés :



Ce réseau est illimité .

- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit :

1 face interdite : plan illimité *	2 faces adjacentes interdites : plan illimité *	2 faces opposées interdites : illimité sur une ligne	3 faces adjacentes interdites
			

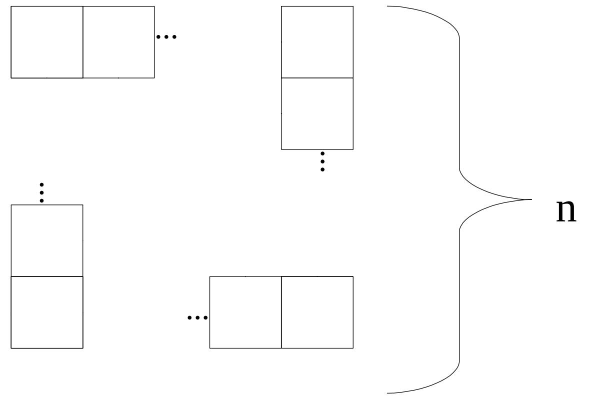
3 faces dont 2 opposées interdites	4 faces adjacentes interdites	4 faces interdites opposées 2 à 2 ou 5 faces interdites
		

*Le schéma montre comment se déplacer lorsque la face de gauche est interdite ou lorsque gauche et arrière , ou gauche et avant ,sont interdites

- Déplacements sur un carré de côté n:

On a aussi regardé si l'on revenait sur la face de départ lorsque l'on fait pivoter le cube sur les bords d'un carré

On fait pivoter le cube de cette manière :



On désigne par n le nombre de cases concernées par le roulement du cube

On remarque que:

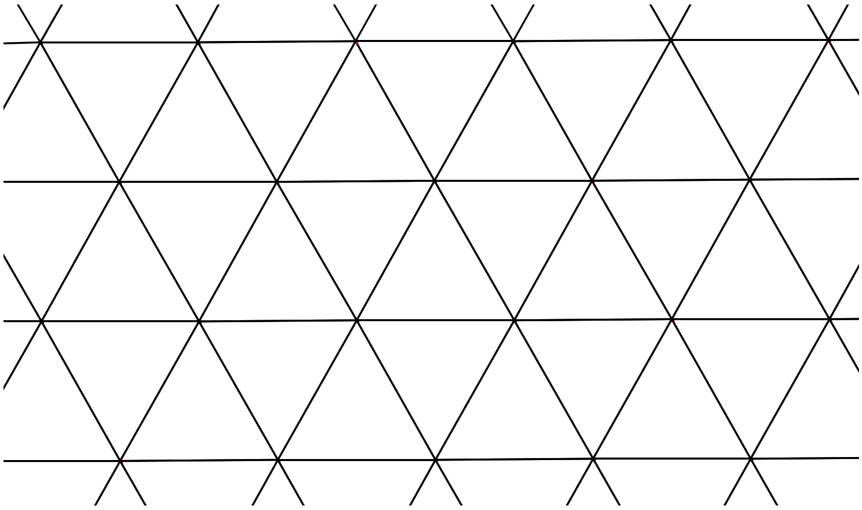
- lorsque n est pair, il faut 3 tours au cube pour revenir dans la position de départ.
- lorsque n est impair, il faut un tour au cube pour revenir dans sa position de départ .

Ceci a été vérifié jusqu'à n = 6

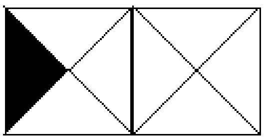
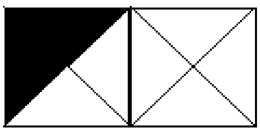
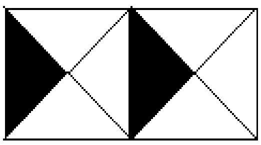
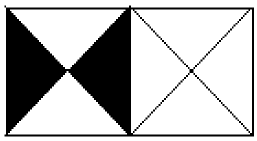
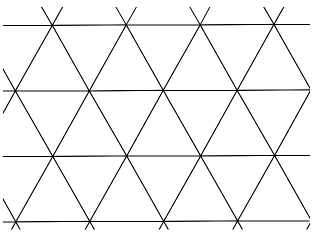
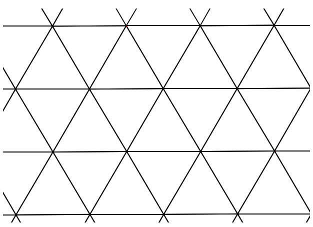
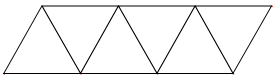
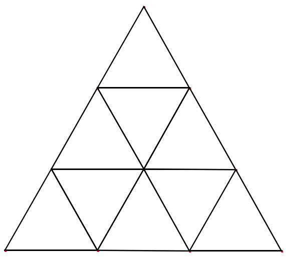
III. L'octaèdre

L'octaèdre possède 8 faces étant des triangles équilatéraux.

- L'octaèdre se déplace sur ce réseau, composé de triangles équilatéraux comme pour le tétraèdre.

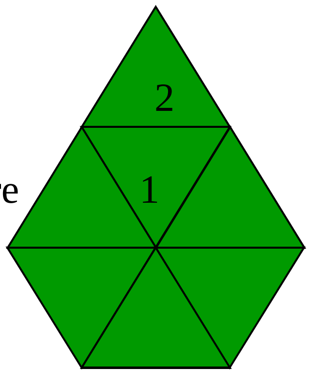


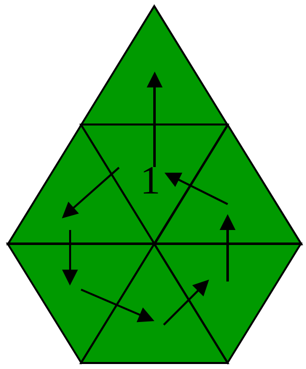
- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit éventuellement :

1 face interdite : plan illimité 	2 faces adjacentes interdites : plan illimité 	2 faces opposées interdites : illimité sur une ligne 	2 faces opposées par le sommet interdites : 
			

Pour obtenir le plan illimité lorsque nous avons 2 faces adjacentes interdites, nous devons faire des déplacements précis :

On part de la face 1 et on veut aller à la face 2 du réseau. Cependant une face de l'octaèdre nous l'interdit. Nous faisons alors la manipulation suivante:

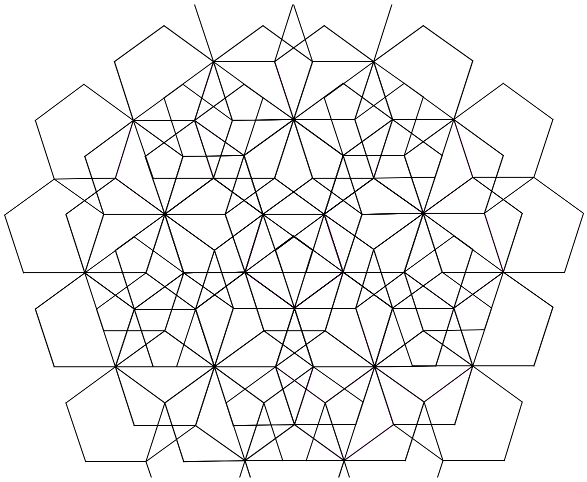




Plus on interdit de faces plus le réseau se réduit

IV. Le dodécaèdre

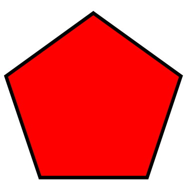
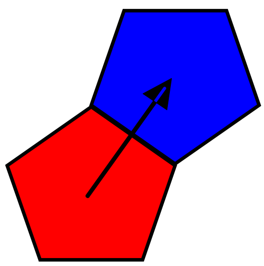
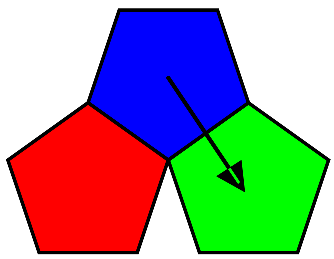
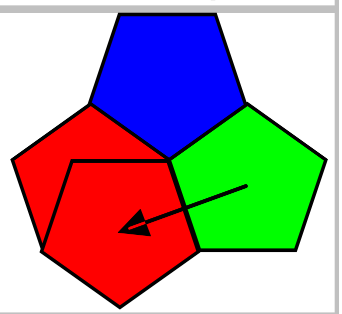
Le dodécaèdre régulier possède 12 faces qui sont des pentagones réguliers.
Voici le plan de son réseau lorsqu'on le fait pivoter :

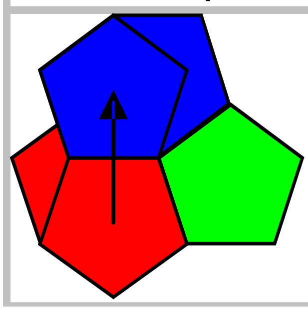
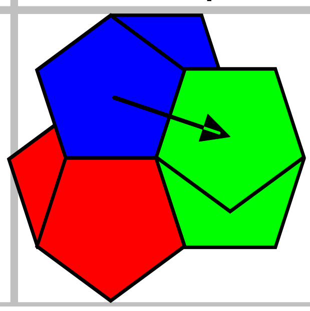
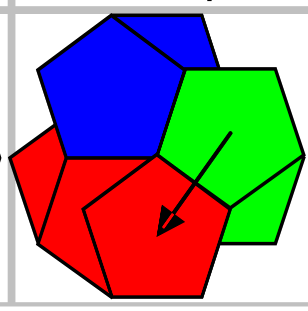
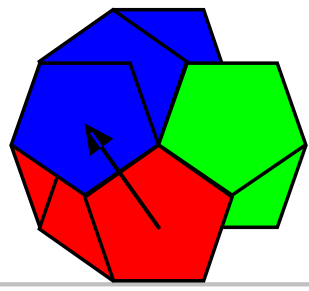


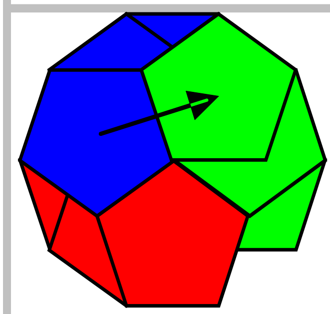
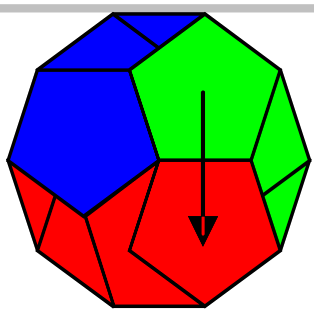
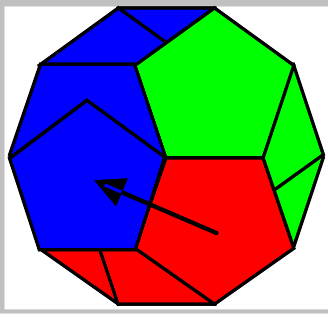
Comme on peut l'apercevoir les faces se superposent rendant le réseau difficile à représenter (le plan ci-dessus ne montre que 3 mouvements possibles en partant de la face du milieu), pour faciliter nos recherches on a fait une recherche en autorisant (3) 1, 2 ou 3 faces juxtaposées.

- Lorsqu'il y a 1 face autorisée le plan est alors un pentagone,
- avec 2 faces le plan est formé de 2 pentagones juxtaposés
- mais lorsqu'il y a 3 faces il faut faire une manipulation décrite ci-dessous

(pour cela on a colorié les faces)

1er étape	2e étape	3e étape	4e étape
			

5e étape	6e étape	7e étape	8e étape
			

9e étape	10e étape	11e étape
		

En pivotant sur un sommet (4) , on remarque qu’avec 3 faces adjacentes, tous les 10 mouvements, on retombe au même endroit sur une face adjacente à celle de départ (la bleue de la 11^{e} étape se superpose à la rouge de départ). Au bout de 30 mouvements, on retombera alors sur la face de départ.

On pense qu’à partir de 4 faces bien sélectionnées, le réseau devient alors infini, avec 3 faces adjacentes on oriente et avec la 4ème on se déplace.

Notes de l'édition

(1) Sommets équivalents : ici, sommets d'où il part le même nombre d'arêtes.
(2) Toutes ces observations ont été faites grâce aux manipulations effectuées que le lecteur est invité à reproduire.
(3) La contrainte est ici différente de celle imposée au départ qui consistait à interdire à une face de toucher le plan.
(4)Le polyèdre pivote toujours autour d'une arête.