Calendriers, Fractions, Méthode de Brocot

Année 2016 – 2017

Bordez Emie, Dieng Lissa, Guerrero Fran, Keita Floriane, Labaigt Simon, Pouyanne Clémence, Sourdeval Thibault, élèves de troisième.

Encadrés par Billard Marie, Goyhetche Alain

Établissements : Collège Gaston Fébus, Orthez

Chercheur : Jacky Cresson, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau

1. Présentation du sujet

Les Hommes ont toujours voulu construire des calendriers pour se repérer dans le temps. Cette année, qui est égale au temps de révolution de la Terre autour du Soleil, doit être mesurée en nombre de jours (c'est le temps que met la Terre pour faire le tour du Soleil). Ce nombre n'est pas entier ; environ 365,242199 j. Il y a un léger décalage (la partie décimale).
On applique le même principe pour le calendrier lunaire, dans ce cas l'année dure approximativement 354,367056 j. : c'est le temps de 12 lunaisons (temps que met la Lune pour accomplir le tour de la Terre).
Nous nous sommes donc intéressés à la construction des calendriers solaire et lunaire et à l'approximation de la partie décimale du nombre de jours dans une année, en approximant ce décalage par des fractions. En effet, les horloges astronomiques fonctionnent à partir de rouages. [1]

- Comment les astronomes ont-ils pris en compte ce décalage ?
- Pourquoi avoir des années bissextiles ?
- Comment sont construits les calendriers ?

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons répondu à ces questions à l'aide de plusieurs outils :

- L'arbre de Brocot
- Les suites de Farey
- Un algorithme.

Il existe une méthode qui permet d'approximer une partie décimale d'un nombre par des fractions en contrôlant l'augmentation du dénominateur. Cette méthode a été découverte par un horloger : Achille Brocot au XIX° siècle.

3. Texte de l'article

Dans toute la suite, les nombres utilisés seront tous positifs.

A : Arbre de Brocot

i : Méthode de construction :

Nous avons deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$ que nous appellerons borne inférieure et borne supérieure.
Pour former l'arbre de Brocot, nous partons de ces deux fractions.

Pour le développer, nous devons trouver une fraction médiante ; nous avons pour cela additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Cette opération est aussi appelée la somme des cancres (car cette « fausse addition » est souvent faite par des élèves apprenant à additionner des fractions)

Par exemple, la fraction médiante de $\frac{0}{1}$ et de $\frac{1}{1}$ est $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$

On remarque que la fraction médiante est comprise entre les deux bornes.

ii La fraction médiante est-elle toujours comprise entre les deux fractions « parents » ?

Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, est ce que l'on a $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{b}{d}$?

Supposons donc que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, on obtient donc l'inégalité $a\,d<b\,c$

Montrons que $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}<0$:

On réduit au même dénominateur : $\frac{a(b+d)}{b(b+d)}-\frac{b(a+c)}{b(b+d)}=\frac{a\,b+a\,d-a\,b-b\,c}{b(b+d)}=\frac{a\,d-b\,c}{b(b+d)}$

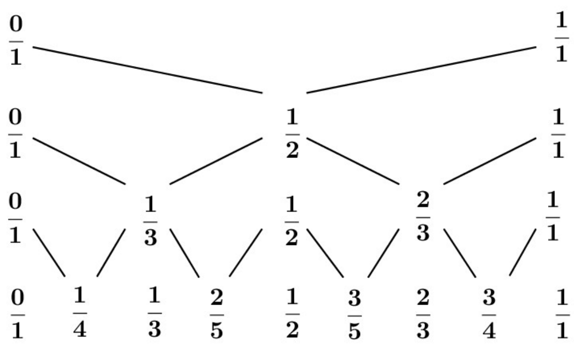
Or, $a\,d<b\,c$ donc $a\,d-b\,c<0$ donc $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}<0$

Finalement $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$

De la même façon, on démontre que $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

iii : une illustration : L'arbre de Brocot

On peut réitérer l'opération décrite auparavant et on obtient la représentation suivante, appelée l'arbre de Brocot.



On passe d'une ligne à l'autre en calculant pour chaque couple de fractions voisines leurs fraction médiante (illustré par les traits).

iii une seconde propriété :

L'écart entre deux fractions « voisines » est égale à l'inverse du produit de leur dénominateur.

Les fractions bornes et fraction médiante:

• *Borne inf:* $\frac{a}{b}$	• *Borne sup:* $\frac{c}{d}$	• *Fraction médiante:* $\frac{a+c}{b+d}$

But:
Démontrer que la différence entre les fractions bornes et la fraction médiante est de 1 sur le produit des dénominateurs.

On suppose que la différence $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{1}{bd}$ et donc que $ad-bc=1$ [2]

Premier calcul, fraction médiante moins borne inf:

$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}$ on réduit au même dénominateur :

$$\frac{b(a+c)}{b(b+d)}-\frac{a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{ab+bc}{b(b+d)}-\frac{ab+ad}{b(b+d)}$$

$=\frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}$ On sait que $bc-ad=1$ donc $\frac{bc-ad}{b(b+d)}=\frac{1}{b(b+d)}$

On peut démontrer de même que $\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{1}{d(b+d)}$

Cette propriété nous permettra de d'évaluer l'erreur entre le nombre à évaluer et la fraction donnée par la méthode.

B : Les suites de Farey :

C'est une autre façon d'encadrer des fractions comme dans l'arbre de Brocot mais sous forme linéaire. Cela fonctionne aussi avec l'addition du cancre.

La différence : on ne conserve que les fractions qui ont un dénominateur inférieur ou égal au rang de la suite.

Les premières lignes :

$F_1 : \frac{0}{1} \; ; \; \frac{1}{1}$

$F_2 : \frac{0}{1} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{1}$

$F_3 : \frac{0}{1} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \frac{1}{1}$

$F_4 : \frac{0}{1} \; ; \; \frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{2}{5} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{3}{5} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{1}$

Ici, de nouvelles fractions sont apparues. On conserve les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ mais les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ sont retirées car elles ont un dénominateur supérieur au rang de la suite.

C : L'algorithme de Brocot :

i : ***Achille Brocot***

Cet horloger français succède à son père à la tête de l'entreprise familiale d'horlogerie. Il invente avec son père la suspension des pendules et améliore les échappements déjà existants.

Parfois, des clients lui amenaient des horloges qui comportent des indications astronomiques dont certains mécanismes ont disparu. Ces horloges mesurent la durée des jours lunaires et solaires, mais le problème est de représenter ces durées décimales par des engrenages sur des roues dentées.

Achille Brocot chercha d'abord dans les méthodes classiques de sa profession : il utilisa la méthode des fractions continues (utilisée pour construire l'horloge astronomique de Strasbourg). Mais il est déçu par cette pratique, qu'il juge trop limitée au niveau des résultats.

Il développa alors sa propre méthode et inventa son arbre qu'il expliquera dans l'ouvrage Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, publié en 1862.

ii *L'algorithme* :

Voici une étape de l'algorithme :

Fraction à approximer : $\frac{a}{b}$

borne inf : $\frac{c}{d}$; borne sup : $\frac{e}{f}$

On calcule : $num_{\inf} = ad - bc$
$num_{\sup} = eb - af$

On effectue $num_{\inf} - num_{\sup}$

Si < 0 : Borne inf inchangée ; borne sup = $\frac{c+e}{d+f}$

Si > 0 : Borne inf = $\frac{c+e}{d+f}$; borne sup inchangée

Explications :

La fraction cible à encadrer est $\frac{a}{b}$ **. On suppose que** $\frac{c}{d} < \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$

Problème : Peut-on savoir facilement si $\frac{a}{b} \in \left[\frac{c}{d} ; \frac{c+e}{d+f}\right]$ ou $\left[\frac{c+e}{d+f} ; \frac{d}{f}\right]$?

calculons la différence entre la fraction cible et la fraction médiante : $\frac{a}{b} - \frac{c+e}{d+f}$

$$\frac{a}{b} - \frac{c+e}{d+f} = \frac{ad + af - bc - be}{b(d+f)}$$

On n'utilise que des nombres entiers positifs donc le dénominateur est toujours positif. Le signe de la différence correspondra donc au signe du numérateur.

Or $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. On s'aperçoit que le numérateur de ce calcul revient souvent et apparaît dans le calcul du dessus : $\frac{ad + af - bc - be}{b(d+f)} = \frac{ad - bc + af - be}{b(d+f)}$

On peut appeler $ad - bc$: $num_{\inf}$ car il correspond au numérateur de l'écart entre la fraction cible et la borne inférieure.

$\frac{e}{f}-\frac{a}{b}=\frac{eb-af}{bf}$. De la même façon, appelons $eb-af=num_{sup}$ car il correspond au numérateur de l'écart entre la borne supérieure et la fraction cible.

On obtient donc la formule : $\frac{a}{b}-\frac{c+e}{d+f}=\frac{num_{inf}-num_{sup}}{b(d+f)}$ $\left(\text{en effet } -num_{sup}=af-ef\right)$

Deux cas :

Si $num_{inf}-num_{sup}<0$	Alors	$\frac{a}{b}-fraction_{médiante}<0$ donc $borne_{inf}<\frac{a}{b}<fraction_{médiante}$ La borne inférieure reste inchangée , on remplace la borne supérieure par la fraction médiante, on recommence l'algorithme
Si $num_{inf}-num_{sup}>0$	Alors	$\frac{a}{b}-fraction_{médiante}>0$ donc $fraction_{médiante}<\frac{a}{b}<borne_{sup}$ On remplace la borne inférieure par la fraction médiante, la borne supérieure est inchangée on recommence l'algorithme

iii un premier exemple :

On veut encadrer la fraction $\frac{5}{16}$ par des fractions dont les dénominateurs sont inférieurs à 4 :

Borne inf	num_{inf}	**Fraction cible**	num_{sup}	**Borne sup**	**Différence** $num_{inf}-num_{sup}$	**Commentaires**
$\frac{0}{1}$	5	$\frac{5}{16}$	11	$\frac{1}{1}$	5 - 11= -6	Le résultat est négatif donc on remplace la borne supérieure
$\frac{0}{1}$	5	$\frac{5}{16}$	6	$\frac{1}{2}$	5 - 6 = -1	Le résultat est négatif donc on remplace la borne supérieure
$\frac{0}{1}$	5	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{1}{3}$	5 -1 = 4	Le résultat est positif donc on remplace la borne inférieure
$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{3}$		

iv : ***le calendrier solaire***.

Pour le calendrier solaire nous avons trouvé comme approximation de la partie décimale 0,242199 $\frac{6}{25}$ mais nous ne pouvons pas rajouter 6 jours tous les 25 ans. Nous allons donc garder la fraction $\frac{1}{4}$ qui correspond à ajouter un jour tous les 4 ans : ce sont nos années bissextiles. Or, en faisant $\frac{1}{4}-\frac{1}{100}$, on s'aperçoit que le résultat est $\frac{6}{25}$. Par conséquent, on doit ajouter un jour tous les 4 ans et enlever un jour tous les 100 ans. Ce qui, au final, nous donne une approximation très précise de ce calendrier.

v : le calendrier lunaire

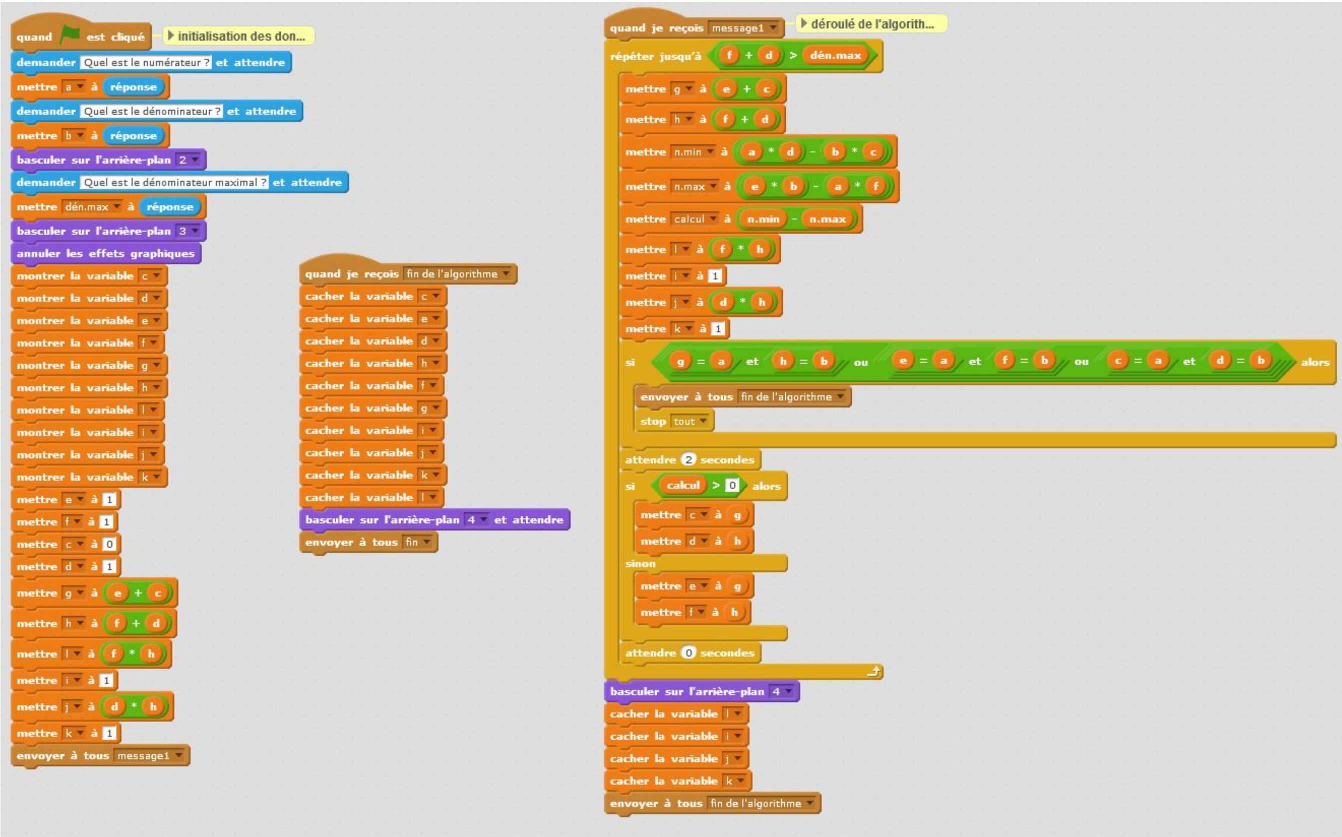
Le calendrier lunaire est le calendrier utilisé par les musulmans. Pour l'approximation de la partie décimale 0,367056 , nous avons trouvé $\frac{11}{30}$: cela revient à dire que sur 30 ans il y a 11 années de 355 jours et 19 autres années de 354 jours.

4. Conclusion

Grâce à la méthode d'Achille Brocot présentée sous différentes formes, nous avons pu comprendre le fonctionnement et la construction des calendriers solaire et lunaire. Nous sommes arrivés à avoir une approximation précise de la partie décimale d'un nombre. Notamment, les parties décimales du nombre de jours dans une année solaire (0,242199) ou lunaire (0,367056).

Annexe :

Le programme présenté :



Notes d'édition :

[1] Le lecteur peut se demander quel est le rapport entre le fait que les horloges ont des rouages et les fractions : si une roue A a p crans et une roue B en contact avec A a q crans, alors quand A fait un tour complet, la roue B fait p/q tours ; c'est là qu'on voit venir les fractions.

[2] La preuve de cet énoncé utilise une démonstration par récurrence : on suppose que la n-ième ligne du tableau de Brocot vérifie la propriété annoncée, et les auteurs prouvent que la propriété est alors vérifiée par la (n+1)-ième ligne. Comme les auteurs on vérifié la propriété pour la première ligne, cette propriété est démontrée.