Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Calculer à la règle non graduée et au compas.

Elèves :
RUNDSTADLER Ilina 5ème
MARION Alice 4ème
THOMMES Emeline 4ème
GRANDJEAN Bixente 3ème
MACEL Eric 3ème
WU Louise 3ème

Enseignants :
HIRIART Louisette
KUNC Christelle

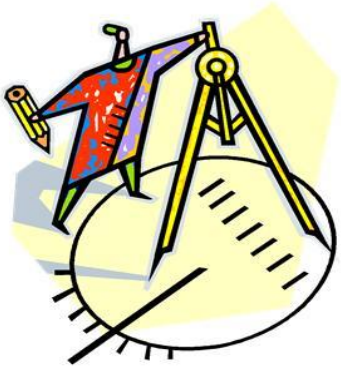
Chercheur :
DE ROTON Anne

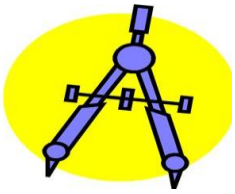
Sujet :
Je suis bien embêtée...
Je dois dessiner une figure en vraie grandeur.
Toutes les dimensions dépendent de deux longueurs a et b non nulles.
Je dispose d'une feuille de papier sur laquelle quatre points O, I, A et B sont placés sur une droite telle que : OI = 1, OA = a et OB = b. Mais j'ai oublié ma règle graduée !
J'ai juste une règle sans graduation et un compas et je dois tracer des segments de certaines longueurs.
Puis-je tracer un segment de longueur a + b, a - b, ab, a/b, a^2, a^3, a^n, $\sqrt{a}$, etc. ?
Bref, quels calculs puis-je faire avec ma règle et mon compas ?

Villers-lès-Nancy Collège George CHEPFER 2013

Sommaire :

A – Calculer à la règle non graduée et au compas. Au tout début …
B – Constructions et propriétés utilisées
1°) Les trois constructions à la règle non graduée et au compas de base utilisées.
2°) Les trois propriétés utilisées.
C – Les constructions :
1°) D'un segment de longueur a + b ou a – b.
2°) D'un segment de longueur une fraction de a.
3°) D'un segment de longueur a/b.
4°) D'un segment de longueur ab.
5°) D'un segment de longueur une puissance de a.
6°) D'un segment de longueur $\sqrt{a}$.
D – Conclusion.





A - Calculer à la règle et au compas

La géométrie euclidienne

Euclide (né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie) est un mathématicien de la Grèce antique. Il a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

La **géométrie euclidienne** est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de **la règle non graduée et du compas**.

L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux seuls instruments.

La règle et le compas en architecture

Les liens qui unissent les constructions à la règle et au compas avec l'architecture sont très étroits.

Au Moyen Âge, le maître architecte est celui qui possède le savoir de la géométrie, il discute sur un pied d'égalité avec les dirigeants religieux. Dans une société où peu savent lire, le plan, construit à la règle et au compas, est le seul moyen de communication simple entre l'architecte et les ouvriers.

Le cordeau remplace la règle non graduée et le compas.

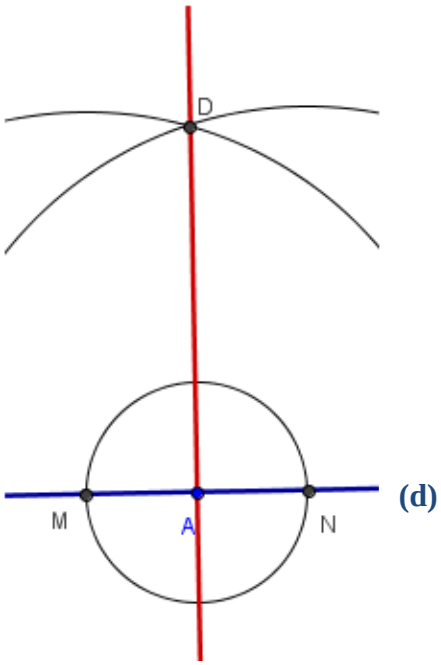
Ils utilisent pour leur construction, un compas et une règle, mais aussi, quand la taille des mesures est trop importante, le cordeau qui remplace indifféremment la règle (trait tiré au cordeau) et le compas.

(Source Wikipédia)

B – Constructions et propriétés utilisées

1°) Les trois constructions de base utilisées :

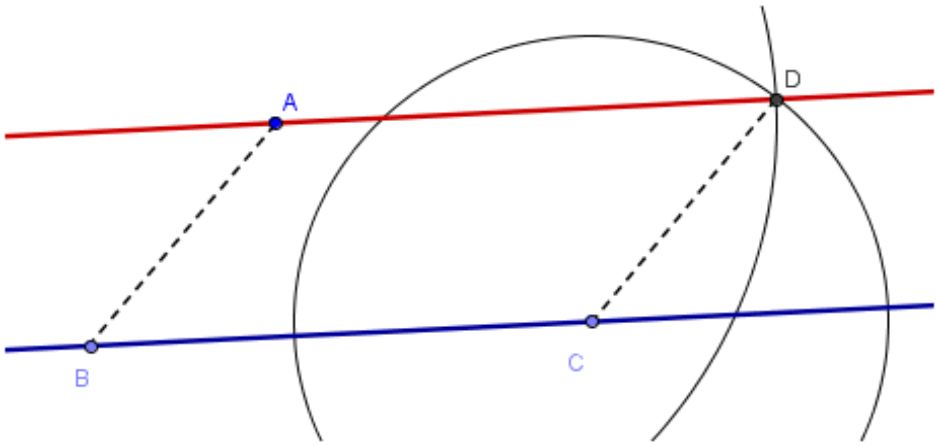
a) Droite perpendiculaire à une droite (d) passant par un point A appartenant à la droite (d).



▪ Sur (d), on trace deux points M et N symétriques par rapport au point A.
A est donc le milieu du segment [MN].
▪ On trace deux arcs cercles de même rayon et de centre M et N, ils sont sécants en D. Le point D est alors situé à égale distance des points M et N, il appartient à la médiatrice du segment [MN].

La droite (AD) est alors la médiatrice du segment [MN], elle est perpendiculaire à (d) passant par A.

b) Droite parallèle à une droite (d) passant par un point A n'appartenant pas à la droite (d).

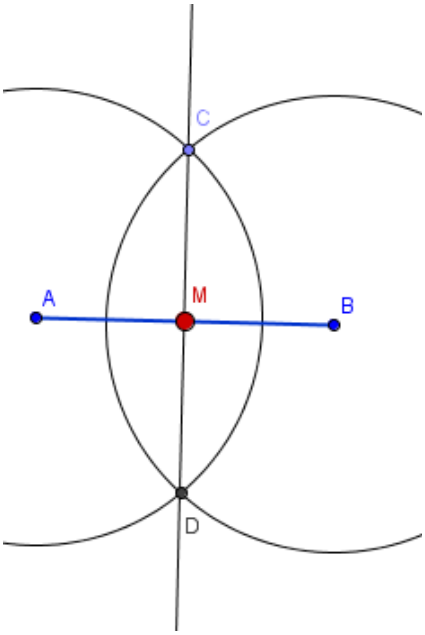


CD = BA
et
AD = BC

▪ On place deux points B et C sur la droite (d).
▪ On trace le cercle de centre C et de rayon AB et le cercle de centre A et de rayon BC. On note D le point d'intersection de ces deux cercles qui se trouve dans le demi-plan délimité par la droite (d) qui contient A.
▪ Le quadrilatère ABCD est alors non croisé et il a ses côtés opposés de même longueur, c'est donc un parallélogramme, et ses côtés opposés sont parallèles.

La droite (AD) est alors la droite parallèle à la droite (d) passant par A.

c) Milieu d'un segment.



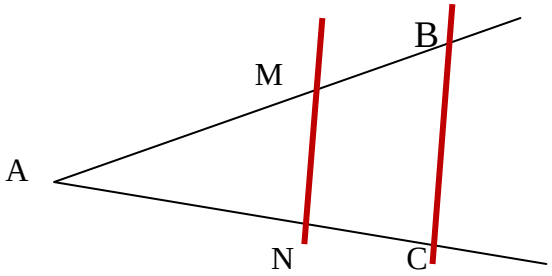
▪ Au compas, on trace deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B, ils se coupent en C et D.
▪ C et D sont situés à égale distance de A et B, ils appartiennent à la médiatrice du segment [AB].
▪ La droite (CD) est donc la médiatrice du segment [AB], elle coupe le segment [AB] en son milieu M.

M est le milieu du segment [AB].

2°) Les trois propriétés utilisées :

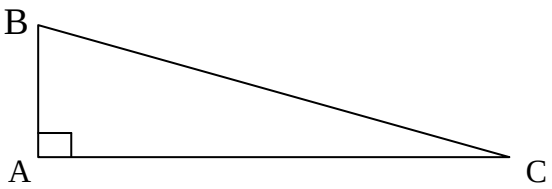
a) Le théorème de Thalès

Si M ϵ [AB], N ϵ [AC] et (MN) // (BC),
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



b) Le théorème de Pythagore

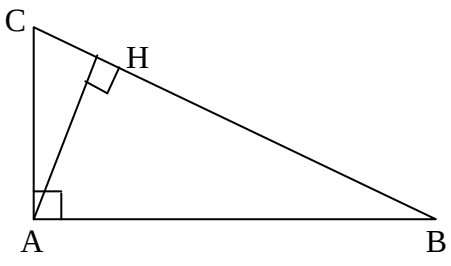
Si ABC est un triangle rectangle en A,
alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$



c) Hauteur dans un triangle rectangle

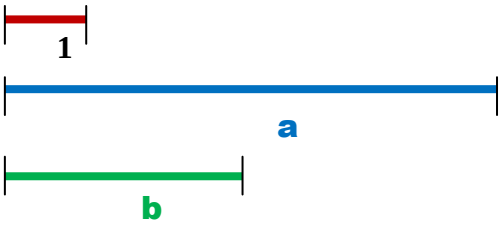
Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A,
alors $AH^2 = BH \times HC$

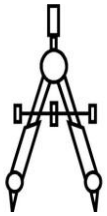
(1)



C – Les constructions

Au départ, on se donne une unité de longueur et deux segments de longueurs a et b.



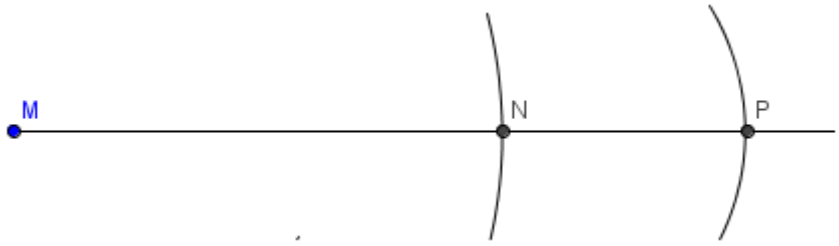


1°) Segment de longueur a + b ou a – b.

Soient a et b deux nombres positifs donnés, a > b
Sur une droite sont placés les points O, I, A et B tels que OI = 1, OA = a et OB = b.

a) Segment de longueur a + b.

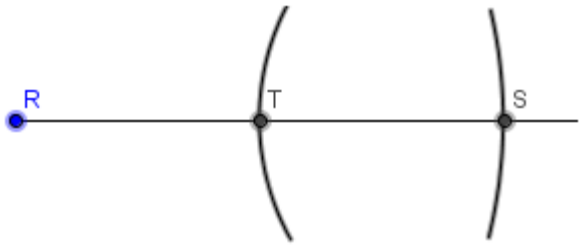
A la règle non graduée, on trace une demi-droite d'origine M.
Au compas, on trace un arc de cercle de centre M et de rayon OA, il coupe la demi-droite d'origine M en N, puis un arc de cercle de centre N et de rayon OB, il coupe la droite (MN) en 2 points dont l'un n'appartient pas au segment [MN], on note P ce point.
On a alors MP = MN + NP = = OA + OB = a + b



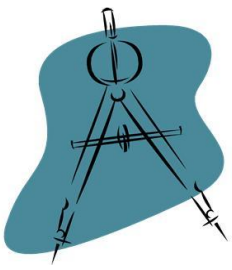
MP = a + b

b) Segment de longueur a – b.

A la règle non graduée, on trace une demi-droite d'origine R.
Au compas, on trace un arc de cercle de centre R et de rayon OA, il coupe la demi-droite d'origine R en S, puis un arc de cercle de centre S et de rayon OB, il coupe le segment [RS] en T.
On a alors RT = RS – ST = OA – OB = a – b.

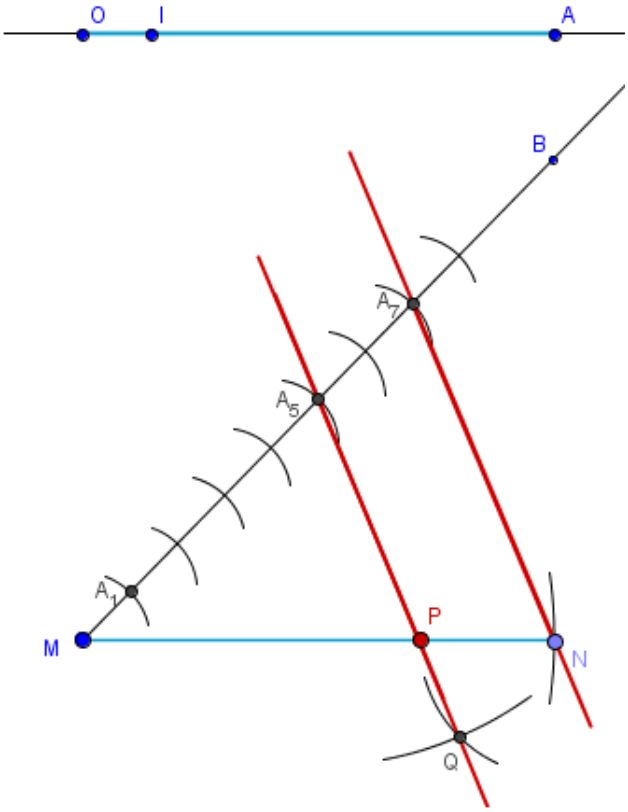


RT = a – b



2°) Segment de longueur une fraction de a.

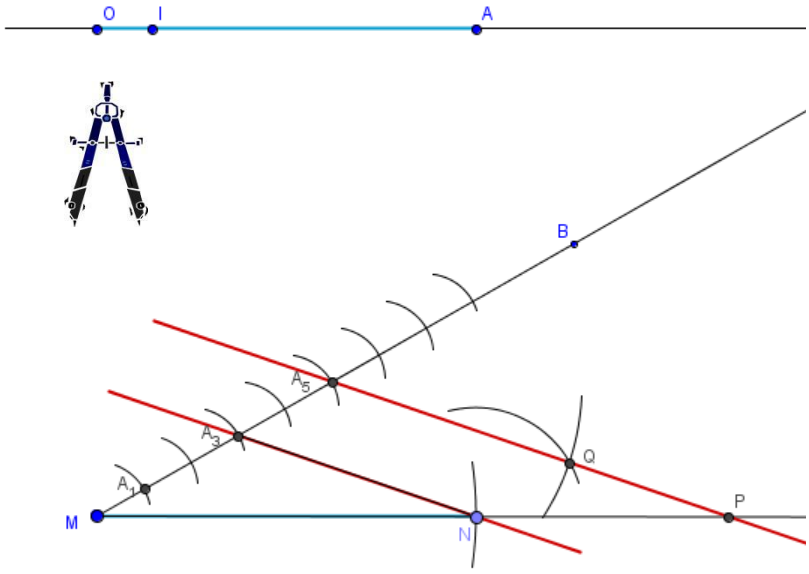
▪ **Segment de longueur $\frac{5}{7} \times a$**



Données : OI = 1 et OA = a.
Au compas et à la règle non graduée, on trace un segment [MN] de longueur a.
On trace une demi-droite [MB] que l'on gradue régulièrement à l'aide du compas.
On trace à l'aide de la règle non graduée la droite (A_7N).
A l'aide du compas, on construit le point Q tel que : A_5A_7NQ soit un parallélogramme.
(A_5Q) est alors parallèle à (A_7N).
La parallèle à (A_7N) passant par A_5 coupe [MN] en P.
Alors d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{MA_5}{MA_7} = \frac{MP}{MN}$, d'où $\frac{5}{7} = \frac{MP}{a}$, d'où $7 \times MP = 5 \times a$,

Et on a alors : **$MP = \frac{5}{7} \times a$.**

▪ **Segment de longueur $\frac{5}{3} \times a$**

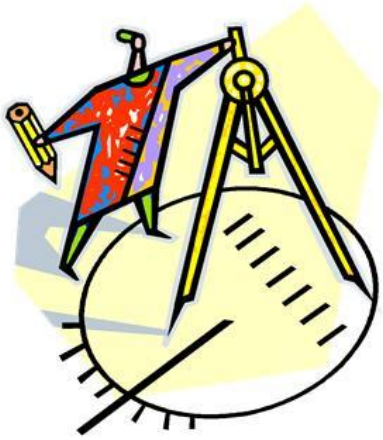


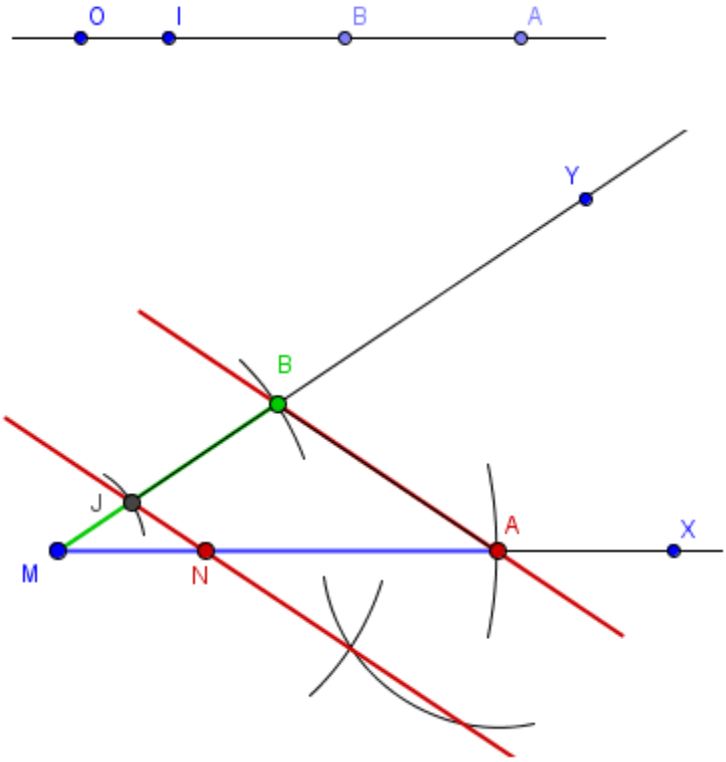
Données : OI = 1 et OA = a.
Comme précédemment, on trace [MN] de longueur a et on gradue régulièrement la demi-droite [MB]
On trace à l'aide de la règle non graduée la droite (A_3N).
A l'aide du compas, on construit le point Q tel que : A_3A_5QN soit un parallélogramme.
(A_5Q) est alors parallèle à (A_3N).
La parallèle à (A_3N) passant par A_5 coupe [MN) en P.
D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{MA_3}{MA_5} = \frac{MN}{MP}$

D'où $\frac{3}{5} = \frac{a}{MP}$, soit $3 \times MP = 5 \times a$ et **$MP = \frac{5}{3} \times a$.**

3°) Segment de longueur $\frac{a}{b}$.

Données : OI = 1, OA = a et OB = b





A la règle non graduée, on trace deux demi-droites de même origine [MX) et [MY).
Au compas : - sur [MX), on place le point A tel que MA = a.
- sur [MY), on place J tel que MJ = 1 et MB = b.
A la règle non graduée et au compas, on trace la droite parallèle à (AB) et passant par J, elle coupe le segment [MA] en N. (cf. Construction de base)

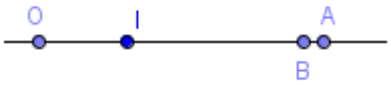
Dans le triangle MBA, J ∈ [MB], N ∈ [MA] (2) et (JN) // (BA), alors d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{MJ}{MB} = \frac{MN}{MA}$ soit : $\frac{1}{b} = \frac{MN}{a}$

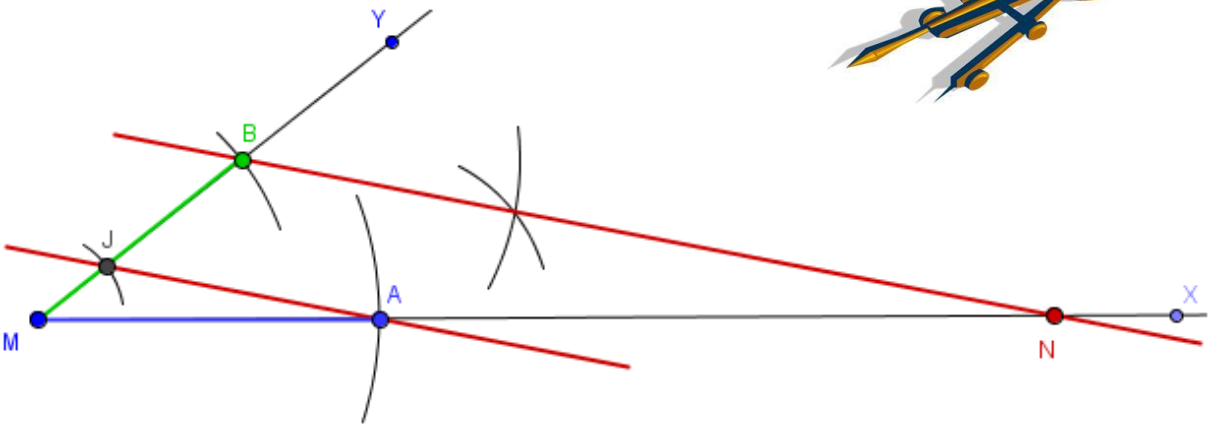
D'où $b \times MN = 1 \times a$, donc **$MN = \frac{a}{b}$**

On explique les constructions sur le stand au congrès à Orsay (avril 2013).

4°) Segment de longueur a × b.

Données : OI = 1, OA = a et OB = b





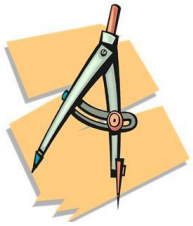
A la règle non graduée, on trace deux demi-droites de même origine [MX) et [MY).
Au compas : - sur [MX), on place le point A tel que MA = a.
- sur [MY), on place J tel que MJ = 1 et MB = b.
A la règle non graduée et au compas, on trace la droite parallèle à (AJ) et passant par B, elle coupe la demi-droite [MX) en N. (cf. Construction de base)

Dans le triangle MBN, J ∈ [MB], A ∈ [MN] (3) et (JA) // (BN), alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{MJ}{MB} = \frac{MA}{MN}$ soit $\frac{1}{b} = \frac{a}{MN}$ donc **MN = a × b.**

Dans le grand hall de l'école Polytechnique, c'est nous….
Congrès d'Orsay (avril 2013)

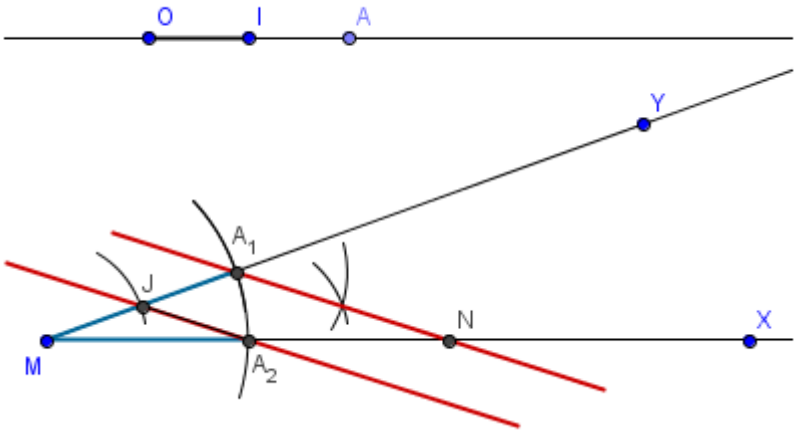
5°) Segment de longueur une puissance de a.

On connaît les deux longueurs OI = 1 et OA = a



a) Segment de longueur a^2.

Données : OI = 1 et OA = a



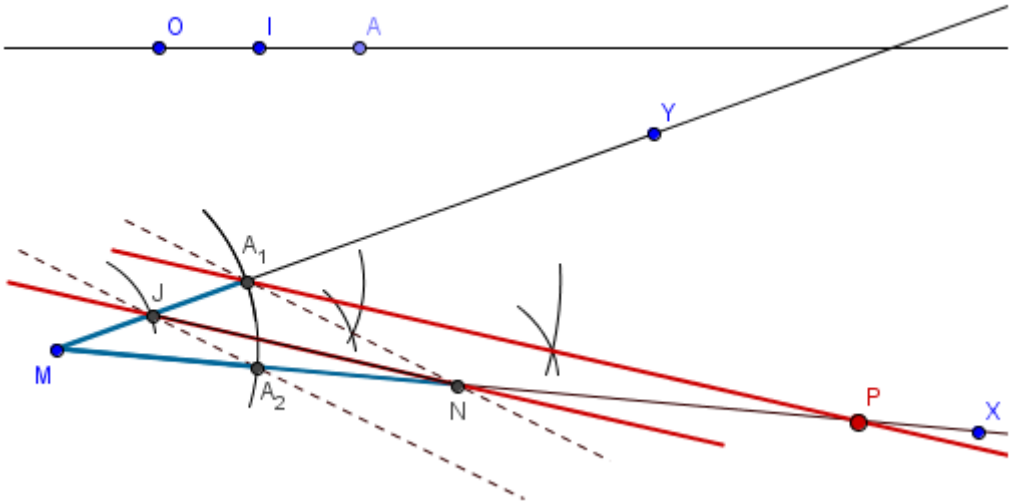
Comme précédemment, on construit le produit $a \times a = a^2$.

$MJ = 1$, $MA_1 = MA_2 = a$

(JA_2) // (A_1N) , alors d'après le théorème de Thalès $\frac{MJ}{MA_1} = \frac{MA_2}{MN}$

D'où $\frac{1}{a} = \frac{a}{MN}$ et alors **$MN = a \times a = a^2$**

b) Segment de longueur a^3.



Comme précédemment, on construit le produit $a^2 \times a = a^3$.

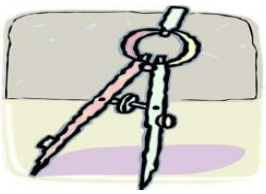
$MJ = 1$, $MA_1 = MA_2 = a$, $MN = a^2$.

(JA_2) // (A_1P) , alors d'après le théorème de Thalès $\frac{MJ}{MA_1} = \frac{MN}{MP}$, d'où $\frac{1}{a} = \frac{a^2}{MP}$ et alors

$MP = a \times a^2 = a^3$.

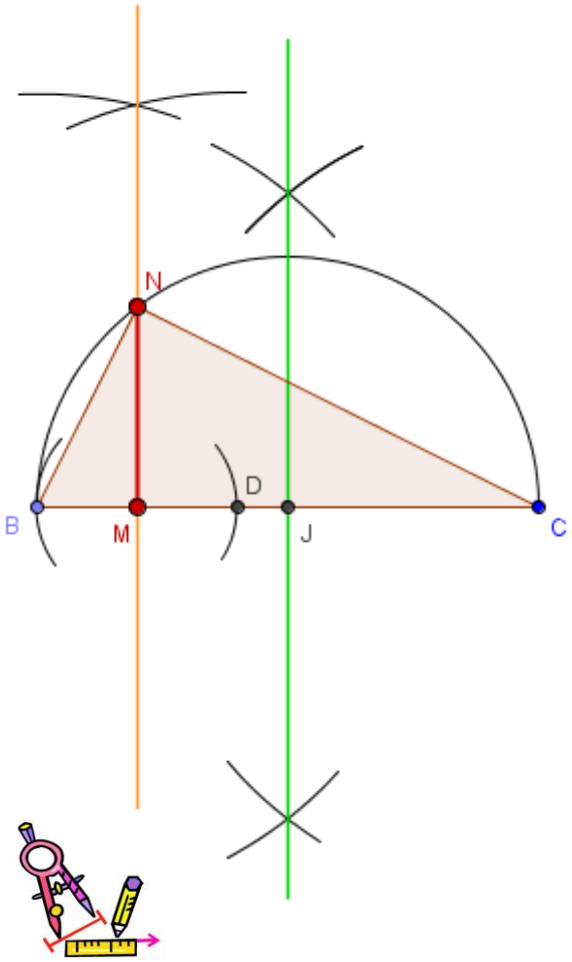
c) Généralisation

Et en continuant de même, on peut construire des segments de longueur a^4, a^5, …., a^n avec n entier positif.



5°) Segment de longueur √a.

Données : OI = 1 et OA = a



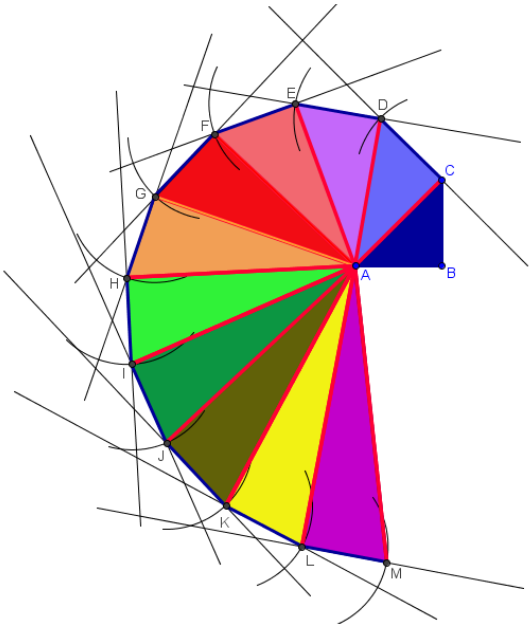
On place 3 points alignés B, M et C tels que : BM = 1 et MC = a à l'aide de la règle non graduée et du compas.
On trace le milieu J du segment [BC] (cf. Constructions de bases).
On trace le demi-cercle de centre J et de diamètre [BC].
On trace **la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par M** (cf. Constructions de base), elle coupe le demi-cercle de diamètre [BC] en N.
N étant un point du cercle de diamètre [BC], le triangle BNC est rectangle en N.
Le point M est le pied de la hauteur issue du sommet N de l'angle droit dans le triangle BNC rectangle en N, on a alors $MN^2 = BM \times MC$.
D'où $MN^2 = 1 \times a = a$
Or MN > 0 donc **$MN = \sqrt{a}$**

Au compas et à la règle non graduée, on trace une suite de triangles rectangles.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
- ABC rectangle en B avec AB = BC = 1 donc AC = $\sqrt{2}$
- ACD rectangle en C avec AC = $\sqrt{2}$ et CD = 1 donc AD = $\sqrt{3}$
- ADE rectangle en D avec AD = $\sqrt{3}$ et DE = 1 donc AE = $\sqrt{4}$ = 2
- AF = $\sqrt{5}$
- AG = $\sqrt{6}$

.
.
.

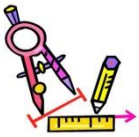
- AM = $\sqrt{12}$ etc.

"L'escargot" de Pythagore

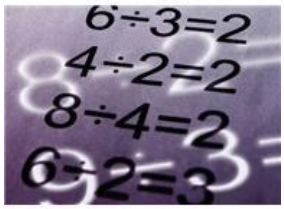


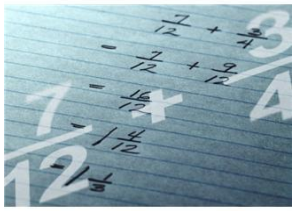
D – Conclusion

Les constructions que nous avons effectuées la règle non graduée et au compas peuvent se combiner entre-elles.
Nous savons donc construire tous les nombres positifs qui s'écrivent uniquement à l'aide des cinq opérations : + , – , × , ÷ et √ .



Par exemple, avec patience, on pourrait construire le nombre $N = 5^2 + 3 \times \sqrt{\frac{7}{3}}$.





Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre chercheuse Anne DE ROTON pour son sujet qui nous a passionnés et nous a tenus en haleine tout au long de l'année. Son aide, sa présence et ses encouragements ont été précieux.

Nous remercions également le Conseil Général de Meurthe et Moselle ainsi que la mairie de Villers les Nancy.

Leur soutien financier, nous a permis de participer au 24e congrès de Math en Jeans à Orsay du 5 au 7 avril 2013. Ce congrès est un véritable temps fort de ce projet. Nous avons pu exposer notre sujet et découvrir des sujets d'une cinquantaine d'ateliers Math en Jeans de Bretagne, d'Alsace Lorraine, du Nord Pas de Calais, de Picardie et d'Ile de France. Il a rassemblé plus de 900 jeunes collégiens et lycéens en présence de chercheurs, d'étudiants, d'universitaires et de visiteurs des établissements scolaires voisins.

Notes d'édition

(1) Cette propriété n'est pas en général connue au collège. On peut la démontrer à partir du théorème de Pythagore appliquée aux triangles ABC, HAC et HAB.
$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + HC^2 + 2.BH.HC$□□
Or $AC^2 = AH^2 + HC^2$ et $AB^2 = AH^2 + HB^2$ D'où $2AH^2 = 2.BH.HC$ □□

(2) Ceci n'est vrai que lorsque a et b sont supérieurs à 1. Mais la construction est analogue dans les cas a<1 ou b<1

(3) même remarque que dans la note 2