La calculatrice aux touches magiques

Année 2019 - 2020

Elèves : Amroune Akim, Achouri Meyril, Habib Elias élèves de 4ème et Rolengo Sarah élève de 3ème
Etablissement : Collège l'Estaque, Marseille
Professeurs : Sébastien Simao et Soraya Chachoua
Chercheur : Lionel Nguyen Van Thé, I2M Marseille

Sujet

Une calculatrice possède trois touches supplémentaires :

- La première calcule la somme des chiffres d'un nombre.
- La seconde calcule le produit des chiffres d'un nombre.
- La troisième calcule la somme des carrés des chiffres d'un nombre.

Que se passe-t-il si on prend un nombre et qu'on appuie plusieurs fois sur une de ces touches ?

1- La somme des chiffres

Premiers essais

- 1532 → 1 + 5 + 3 + 2 = 11 → 1 + 1 = 2
- 1546910241 → 1 + 5 + 4 + 6 + 9 + 1 + 0 + 2 + 4 + 1 = 42 → 4 + 2 → 6

Propriété 1 : *Quel que soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche somme, on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Voici nos premières remarques pour prouver cette propriété :
Pour un nombre N à deux chiffres, sa somme sera inférieure à 18, à l'étape suivante la somme inférieure à 9 et on tombe sur un nombre à un chiffre.
Pour un nombre à trois chiffres sa somme sera inférieure à 9×3 soit 27. On tombe donc sur un nombre à deux chiffres qui à l'étape suivante va nous donner un nombre à un chiffre.

Démonstration
Première partie : Dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, la somme de ses chiffres sera strictement inférieure au nombre de départ. Si on note s(N) la somme des chiffres du nombre N, on veut démontrer que : $s(N) < N$. (1)
Un nombre N à trois chiffres, va s'écrire :

$N = 100 \times c + 10 \times d + u$ où c, d et u sont les chiffres des centaines, dizaines et unités.

$$s(N) = c + d + u$$

Or $c \neq 0$, donc : $c < 100\,c$
De plus, on a : $d + u \leq 10d + u$ (égalité si $d = 0$) donc $c + d + u < 100c + 10d + u$.
On a bien s(N) < N.
Pour un nombre N à k chiffres, le raisonnement est identique sur le chiffre qui correspond au k-ième rang.

Deuxième partie : A chaque étape, le nombre devient strictement plus petit. Après plusieurs étapes, il va donc devenir un nombre à un chiffre. Or, quand un nombre a un chiffre sa somme est identique à lui-même. Donc, le résultat ne bouge plus après appuis successifs sur la touche.

Vers quels résultats arrive-t-on ?

On s'est d'abord intéressé aux nombres formés uniquement avec des 9.
Essais

- 99 → 18 → 9
- 9999 → 36 → 9
- 9999999 → 63 → 9
- On a pris aussi d'autres nombres par exemple : 1052 × 9 = 94689468 → 27 → 9

Propriété 2 : *Quand on part d'un nombre multiple de neuf, on finit par tomber sur 9.*

Démonstration

Cela nous a rappelé le critère de divisibilité par 9 qu'on a vu en cours : un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Autrement dit, quand on part d'un multiple de 9 à chaque appui sur la touche magique "somme", on obtient toujours un multiple de 9. Mais d'après la première propriété, on finit par tomber sur un nombre à un chiffre qui doit être multiple de 9 donc cela ne peut être que 9.

Pour les autres cas, on a regardé des nombres consécutifs (1, 2, 3, 4,..., 35), et on s'est aperçu que les résultats finaux revenaient cycliquement tous les neuf nombres.

Propriété 3 : *Pour tout nombre non divisible par 9, le résultat final est le reste de la division euclidienne du nombre de départ par 9.*

Démonstration

Pour cela, on a remarqué que les puissances de 10 peuvent toujours s'écrire comme somme d'un multiple de 9 et de 1. En effet :

$10^2 = 99 + 1$
$10^3 = 999 + 1$
$10^4 = 9999 + 1$
$10^k = 99999...9 + 1$

Dans l'écriture de N en base 10 : N = $a_k \times 10^k + ... + a_0$
On peut remplacer chaque puissance de 10 par un multiple de 9 et en utilisant la formule de la simple distributivité pour chaque puissance de dix, on a donc :

N = multiple de 9 + $(a_k + ... + a_0)$

Autrement dit : N = multiple de 9 + s(N).
Ainsi N et s(N) ont le même reste dans la division euclidienne par 9.
On peut comme tout à l'heure, conclure que le résultat final va avoir le même reste que N dans la division euclidienne par 9. De plus, le quotient va être nul car sinon le résultat serait supérieur à 10.

2- Produit des chiffres

Premiers essais

- 23 → 2 × 3 = 6
- 623 → 6 × 2 × 3 = 36 → 3 × 6 = 18 → 8
- 302 → 3 × 0 × 2 = 0
- 11111111111 → 1
- 10^n → 0

Propriété 4 : *Quel que soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche "produit", on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Démonstration

On va procéder comme pour la somme des chiffres et d'abord démontrer que : dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, le produit de ses chiffres sera strictement inférieur au nombre de départ. (2)
Notons p(N) le produit des chiffres de N. Essayons d'abord de le démontrer pour un nombre à trois chiffres.

$N = c \times 100 + d \times 10 + u$ et $P(N) = c \times d \times u$

Or d et u sont inférieurs ou égaux à 9 donc : $p(N) \leq 81c$
Donc $p(N) < 100\,c$ soit $p(N) < N$.
Pour un nombre N à k chiffres, le raisonnement est identique. Tous les chiffres étant inférieurs ou égaux à 9, on peut démontrer que $p(N) \leq a_k \times 10^k$ et conclure de la même façon. (3)
Par contre, il est très difficile de prévoir le résultat que l'on va obtenir. D'ailleurs, dès qu'il y a un zéro ou un cinq et un deux dans l'écriture en base dix de N alors $p(N) = 0$. On ne sait pas en combien d'étapes la suite se stabilise.

3- Somme des carrés des chiffres

Premiers essais

- 25 → 2 × 2 + 5 × 5 = 29 → 4 + 81 = 85 → 64 + 25 = **89** → 64 + 81 = 145 → 1 + 16 + 25 = 42 → 16 + 4 = 20 → 4 → 16 → 1+36 =37 → 9+49 =58 → 25+64 → **89**

On obtient ici un cycle : dans un premier temps les résultats augmentent puis diminuent mais surtout ou bout d'un certain nombre d'étapes, les mêmes nombres réapparaissent.

- 1 → 1
- 10^n → 1 Ici, pour n'importe quelle puissance de 10, on obtient toujours 1.

Comme les calculs ici étaient bien plus longs, on a réalisé un programme sur Scratch (cliquez sur le lien). On l'a testé sur les 100 premiers nombres. Ce qui nous permet d'établir la conjecture suivante :

Conjecture : *Après plusieurs appuis sur cette touche, on peut tomber :*

- Soit sur un cycle : 4 → 16 → 37 → 58 → 89 → 145 → 42 → 20 → 4
- Soit sur 1.

En effet, on s'est aperçu que dès qu'on prend un nombre à plus de deux chiffres, la somme des carrés est plus petite que le nombre de départ. (4) On finit par retomber sur un nombre entre 1 et 100. Nous n'avons toutefois pas eu le temps de le démontrer.

Notes d'édition

(1) Le résultat est vrai dès qu'un nombre a au moins 2 chiffres.

(2) Comme précédemment, ce résultat est vrai dès qu'un nombre a au moins 2 chiffres.

(3) Attention la plus grande puissance de 10 pour un nombre ayant k chiffres est 10^{k-1}.
Plus précisément, on démontre alors de la même manière que p(*N*) ≤ $9^{k-1} \times a_k$ qui est strictement inférieur à $10^{k-1} \times a_k$, lui-même inférieur ou égal à *N*.

(4) Ici, ce résultat n'est valable que pour un nombre avec strictement plus de 2 chiffres, puisqu'on a vu avec les exemples fournis que ce n'était pas le cas pour 25, par exemple.