Calcul d'aires dans une forêt

ANDRES Elsa, BELHIA Sarah, CASANOVA Laurine, LOMBARD Alexia, MAGNE Laura, MATUSZAK Eléonore, VIDES DE CARVALHO Elisa, 3ème

Collège Achille Mauzan, Gap
Enseignant: Isabelle HAZIM.
Chercheur: Vincent DELECROIX

Sujet

Un bûcheron veut acheter un terrain boisé pour en exploiter les arbres. Les arbres sont régulièrement espacés sur une grille [un quadrillage]. La législation, pour des raisons de sécurité, lui impose de clôturer son terrain. Pour limiter les frais, il décide de se servir des arbres comme poteaux de clôture. Ceci lui réduit donc d'autant le nombre d'arbres à exploiter. Nous cherchons le terrain le plus rentable pour lui, c'est à dire, l'exploitation avec la plus petite aire et le plus grand nombre d'arbres intérieurs.

Mots-clés

AIRE, PROBLÈME, QUADRILLAGE, FORMULE DE PICK, RECTANGLE, MINIMUM, TRIANGLE, DÉCOUPAGE, POLYGONE

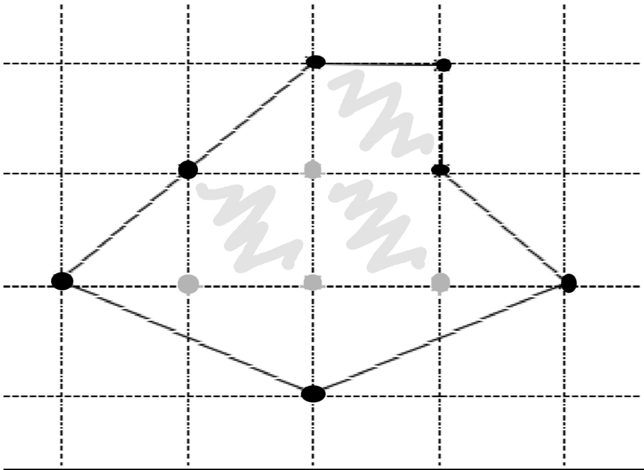
Une formule reliant l'aire et le nombre d'arbres

Nous avons trouvé une formule permettant de calculer les aires [l'unité de longueur est le côté du carré de base de la grille]. Etant donné *un terrain fait d'un seul morceau et sans trou*, la formule suivante relie l'aire du terrain, A, le nombre d'*arbres extérieurs* au terrain E [ces arbres sont ceux qui **bordent** le terrain] et *le nombre d'arbres intérieurs I*:

$E / 2 + I - 1 = A$

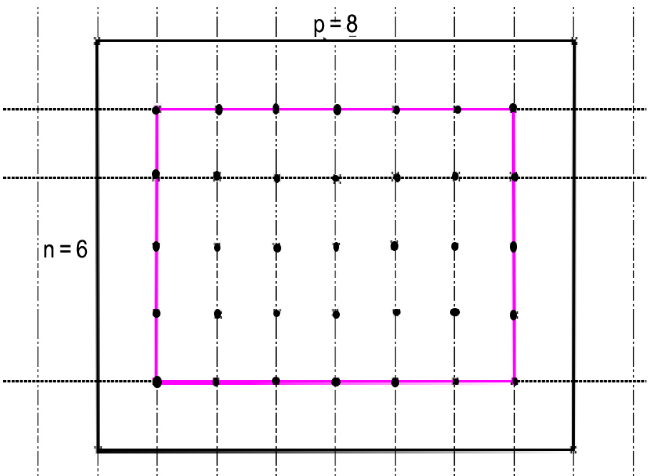
Ce résultat a été décrit pour la première fois par Georg Alexander Pick en 1899.

Application de la formule sur l'exemple ci- après:



$E= 7$; $I= 4$; $E / 2 + I - 1=7 / 2 + 4 -1 = 6{,}5$
A= 6,5, ce que l'on peut vérifier directement, donc la formule fonctionne sur cet exemple.

La formule de Pick pour les rectangles:



Nous voulons prouver, pour les rectangles qui suivent les lignes de la grille (dont les côtés sont soit verticaux, soit horizontaux et passent par les arbres de la grille que nous avons tracée) notre formule:

$E/2+I-1=A$

Prenons un rectangle dont la longueur du côté horizontal est n, celle du côté vertical étant p. Nous pouvons écrire une formule explicite pour E, I et A en fonction de n et p.

Nous avons $A=np$.

Nous constatons que le nombre d'arbres sur le segment de longueur p est égal à $p+1$ et que le nombre d'arbres sur celui de longueur n est égal à $n+1$.Cependant, il y a des arbres en commun se trouvant sur les quatre coins qu'il faudra soustraire.

Nous avons : $E=n+1+p+1+n+1+p+1-4$

$E=2n+2p+4-4$

$E=2(n+p)$

Nous constatons que l'on peut tracer un rectangle imaginaire à l'intérieur du rectangle d'origine. [ses dimensions sont n-2 et p-2]. Nous constatons que le nombre d'arbres sur le segment de longueur n-2 est égal a n-1 et le nombre d'arbres sur celui de longueur p-2 est égal à p-1. Donc nous avons :

$I=(n-1)(p-1)$

Revenons à notre formule de départ : $E/2+I-1=A$. Remplaçons les lettres du premier membre de l'égalité par ce que l'on a trouvé ci-dessus :

$2(n+p)/2+(n-1)(p-1)-1$

Nous simplifions les 2 puis développons $(n-1)(p-1)$

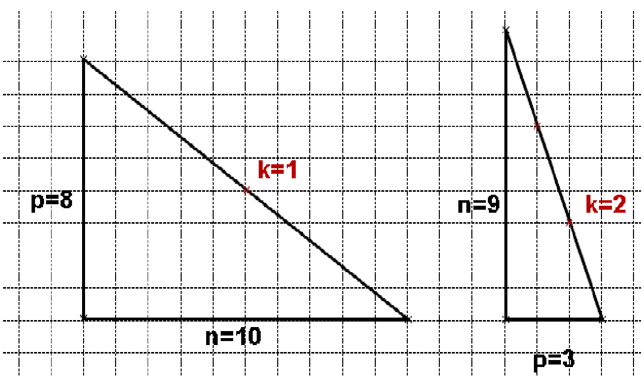
$(n-1)(p-1) = n+p+np-n-p+1-1$

Nous simplifions les n, les p et les 1.

Or $np=A$. [Nous trouvons np]

Nous venons de vous démontrer la formule $E/2+I-1=A$ pour les rectangles qui suivent les lignes de la grille.

La formule de Pick pour certains triangles rectangles



Nous voulons prouver, pour les triangles rectangles dont les côtés différents de l'hypoténuse sont l'un vertical et l'autre horizontal et passent par les arbres de la grille , notre formule $E/2+I-1=A$

Nommons n et p les longueurs des côtés différents de l'hypoténuse et k le nombre d'arbres se trouvant sur l'hypoténuse sans compter les deux extrémités.

Remplaçons les lettres E, I et A par des expressions fonctions de n, p et k:

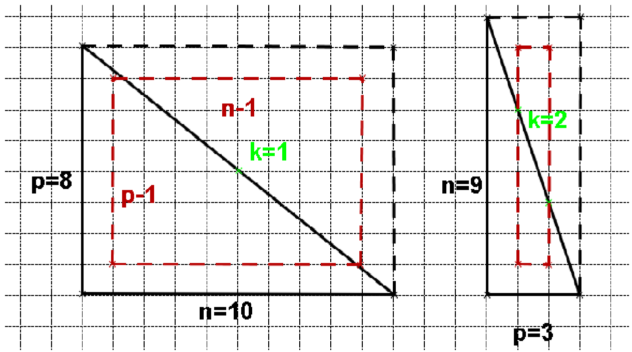
Nous avons $A=np/2$

Nous constatons que le nombre d'arbres sur le côté de longueur n est égal à $n+1$ et le nombre d'arbres sur celui de longueur p est égal à $p+1$.

Cependant, il y a un arbre en commun se trouvant sur le sommet de l'angle droit qu'il faudra soustraire.

Nous avons : $E=n+1+p+1-1+k = n+p+1+k$

Nous pratiquons une symétrie centrale par rapport au milieu de l'hypoténuse. Nous obtenons donc un rectangle. Nous constatons que l'on peut tracer un rectangle imaginaire à l'intérieur ce rectangle. Ce premier est espacé de 1 unité de l'autre, sa longueur est n-2 et sa largeur est p-2.



Nous constatons que le nombre d'arbres sur le segment de longueur n-2 est égal a n-1 et le nombre d'arbres sur celui de longueur p-2 est égal à p-1. Nous avons donc $I=[(n-1)(p-1)-k]/2$

Revenons à notre formule de départ : $E/2+I-1=A$

Remplaçons les lettres de la première partie de l'égalité par ce que l'on a trouvé ci-dessus :

$(n+p+1+k)/2+[(n-1)(p-1)-k]/2-1$

Nous développons $(n-1)(p-1)$

$(n+p+1+k)/2+(np-n-p+1-k)/2-1$

Nous rassemblons $(n+p+1+k)$ et $(np-n-p+1-k)$

$(n+p+1+k+np-n-p+1-k)/2-1$

Nous simplifions les n, les p et les k.

$(np+2)/2-1$

Nous séparons np et 2 dans la parenthèse.

$np/2+2/2-1$

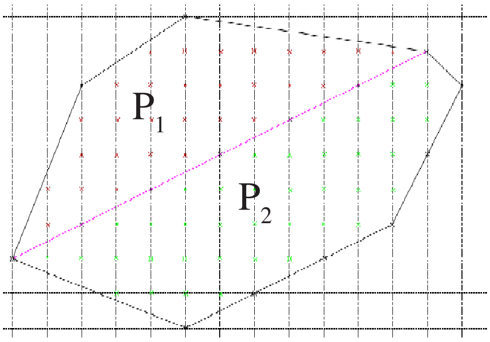
Il nous reste seulement : $np/2$, soit l'aire du triangle rectangle de départ.

Nous venons de vous démontrer la formule $E/2+I-1=A$ pour les triangles rectangles qui suivent les lignes de la grille.

Collage

On cherche à démontrer que si la formule $E/2+I-1=A$ marche pour deux polygones simples adjacents par un ou plusieurs côté(s), alors elle marche aussi pour leur union. [Les polygones sont vus ici comme des surfaces, leur union est supposée sans trou, ce qui impose que les côtés communs soient consécutifs].

On construit donc deux polygones adjacents :



On nomme le premier polygone P_1, le second P_2. On appelle P l'union de P_1 et de P_2.

Soit A_1 l'aire de P_1.

On suppose que $A_1 = E_1/2+I_1-1$.

Soit A_2 l'aire de P_2.

On suppose que $A_2 = E_2/2+I-1$.

On nomme k le nombre de points du ou des côté(s) commun(s).

Lorsque l'on compte les arbres extérieurs de P_1 et de P_2, « k » arbres sont comptés deux fois. Néanmoins, deux arbres restent extérieurs sur P.

Donc, lorsque l'on revient à P :

- on ajoute k-2 à la somme des arbres intérieurs de P_1 et de P_2, donc :

  $I = I_1+I_2$.

- on enlève $2k$-2 à la somme des arbres extérieurs de P_1 et de P_2, donc :

  $E = E_1+E_2-2k+2$.

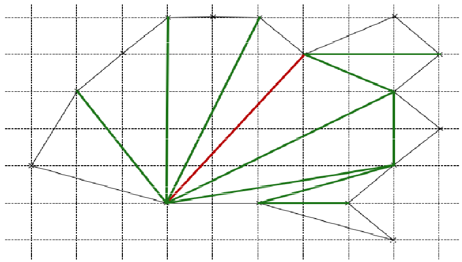
Soit A l'aire de P. On sait que $A = A_1+A_2$.

On remplace les termes de la formule par ceux calculés ; on obtient :

$$\begin{aligned}E/2+I-1 &= (E_1+E_2-2k+2)/2+I_1+I_2+k-2-1\\ &=E_1/2+I_1-1+E_2/2+I_2-1-k+1+k-1\\ &=A_1+A_2=A \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

Découpage et conjectures

D'autre part, nous avons constaté qu'un polygone pouvait toujours être découpé en *triangles adjacents* [conjecture 1]

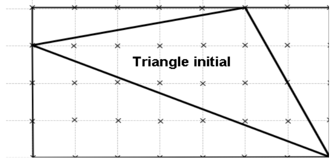


[Si cela est vrai] et si nous prouvons que notre formule est vraie pour un triangle quelconque, alors elle sera vraie pour la réunion de deux triangles, puis de trois ... et *pour un polygone quelconque tout entier.*

Nous avons une idée, mais la démonstration pour un triangle quelconque n'est pas encore terminée...

L'idée est la suivante :

On prend un triangle quelconque. On l'enferme dans



un rectangle de telle manière que le rectangle est découpé en notre triangle initial et trois triangles rectangles ; on applique la formule $P_1 \cup P_2$ [vue pour l'union de polygones] avec le triangle et les triangles rectangles qui sont autour du triangle initial.

Conclusion

La formule de Pick nous a permis de donner une solution à notre problème:

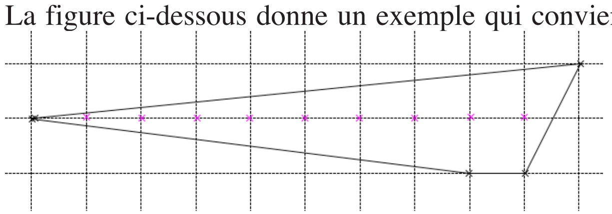
Nous avions remarqué que les aires étaient soit des entiers , soit des demi- «entiers impairs» . Nous en avons maintenant la preuve avec la formule de Pick: si E est pair, $E/2$ est entier et $A=E/2+I-1$ est entier (c'est une somme d'entiers); si E est impair, E/2 est demi-entier et $A=E/2+I-1$ est demi-entier («virgule 5»).

Pour notre bûcheron, on veut que E soit le plus petit possible, et que I soit le plus grand possible.

Si l'on se fixe une aire entière, par exemple A=10, alors E est pair. Pour que E soit le plus petit possible : E=4. (avec E=2, on aurait une aire nulle) [car le polygone serait réduit à un segment]

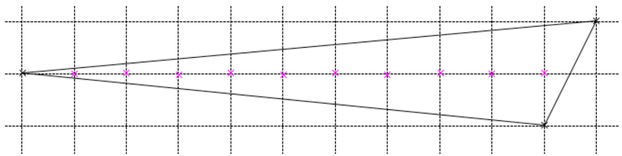
Donc I =10- (4 /2)+1= 10-2 +1= 9 donc I = 9

La figure ci-dessous donne un exemple qui convient :



Si l'on se fixe une aire demi-entière, par exemple A= 10,5 : alors E est impair. Pour que E soit le plus petit possible : E=3 (il faut au minimum 3 arbres pour délimiter un terrain). Donc I=10,5 - (3 /2)+1 = 10,5 – 1,5 +1 = 10 donc I = 10

La figure ci-dessous donne un exemple qui convient



*Finalement, pour une aire entière égale à «**x**», le nombre d'arbres exploitables sera de «**x**-1», et pour une aire demi-entier impair de «**y**», le nombre d'arbres exploitables sera de «**y**-0,5».*

***