C'est pas du gâteau !

Année 2014 - 2015

Elèves : Madeleine BAKER 3°A, Molly RHODES 3°A, Zoé GILLE 3°A et Jade PASTORELLI 3°A
Professeurs : Christophe PIGNON, Edelyne DE NODREST.
Etablissement : Collège de Marciac, Marciac

Chercheuse : Agnès LAGNOUX de l'université Paul Sabatier, Toulouse.

I-Présentation du sujet

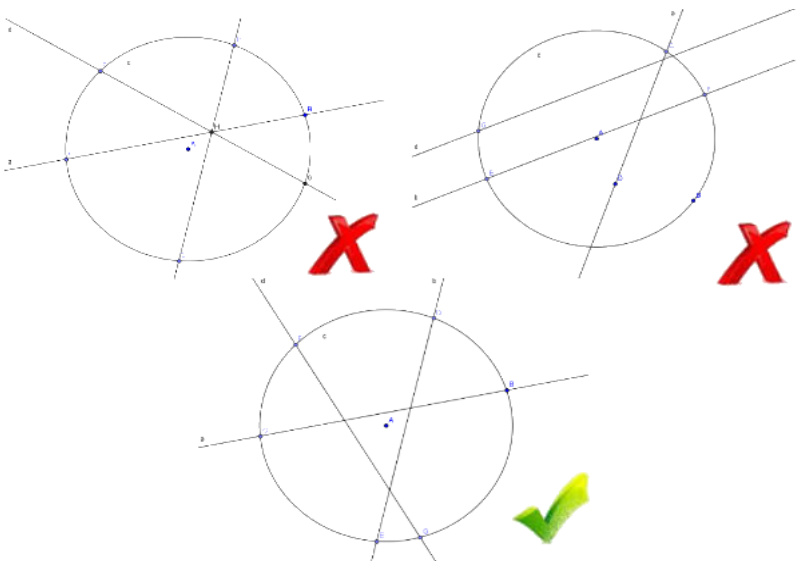
On considère un gâteau rond, que l'on propose de couper plusieurs fois, avec un couteau dont la lame est suffisamment grande pour couper d'un bout à l'autre du gâteau. Combien de parts au maximum est-il possible d'obtenir en un nombre donné *n* de coups de couteau ?

II-Notre propriété

Soit p le nombre de parts, donc p(n) est le nombre de parts pour un nombre n de coups de couteau.
Le nombre maximum de parts se trouve avec la formule : $p(n) = n + \frac{n\times(n-1)}{2} + 1$. (1)

III-Recherches

Nous avons commencé par chercher manuellement combien de parts nous pouvions faire au maximum. Nous avons vite remarqué que les droites ne doivent être ni concourantes ni parallèles. (2) (3)



Lorsque les droites sont concourantes, comme sur le premier dessin, on perd une part au niveau du point. Lorsque les droites sont parallèles, comme sur le deuxième dessin, une part n'est pas recoupée : on perd alors une nouvelle part.

Donc pour obtenir le nombre maximum de parts, chaque nouvelle droite doit couper chacune des précédentes en un nouveau point.

<u>Le nombre de parts a-t-il un rapport avec le nombre de points de contacts entre les coups de couteau ?</u>

On sait que pour avoir un plus grand nombre de parts, chaque nouvelle droite doit couper
toutes les précédentes. Donc, elle va couper les autres droites en un nouveau point de contact à chaque fois. Il va donc y avoir autant de points de contact rajoutés que de droites précédentes.

Donc, quand on rajoute la n-ième droite, on a n-1 points de contact ajoutés à ceux d'avant.

Soit c(n) le nombre de points de contact total pour un nombre n de droites.

On a donc d'après la remarque précédente : c(n)= n-1 + c(n-1)

Exemple pour n=5
c(5)=5-1+c(5-1)
c(5)=4+c(4)
c(5)=4+(4-1+c(4-1))
c(5)=4+(3+c(3))
c(5)=4+(3+(3-1+c(3-1)))
c(5)=4+(3+(2+c(2)))
c(5)=4+(3+(2+(2-1+c(2-1))))
c(5)=4+(3+(2+(1+c(1))))

c(1)=0 car s'il n'y a qu'une seule droite, il ne peut pas y avoir d'intersection, donc pas de points de contact.

Donc,
c(5)=4+(3+(2+(1+0)))
c(5)=4+3+2+1+0
c(5)=10

En généralisant c(n)= n-1 +c(n-1)= n-1+n-2+c(n-2)= n-1+n-2+n-3+c(n-3)=...= n-1+n-2+n-3+...+c(0) = n-1+n-2+n-3+...+1

Donc c(n) = 1+2+3+...+n-1

Donc c(n) est la somme des n-1 premiers entiers.

<u>Donc on a besoin de calculer la somme des n-1 premiers entiers, soit S cette somme.</u>

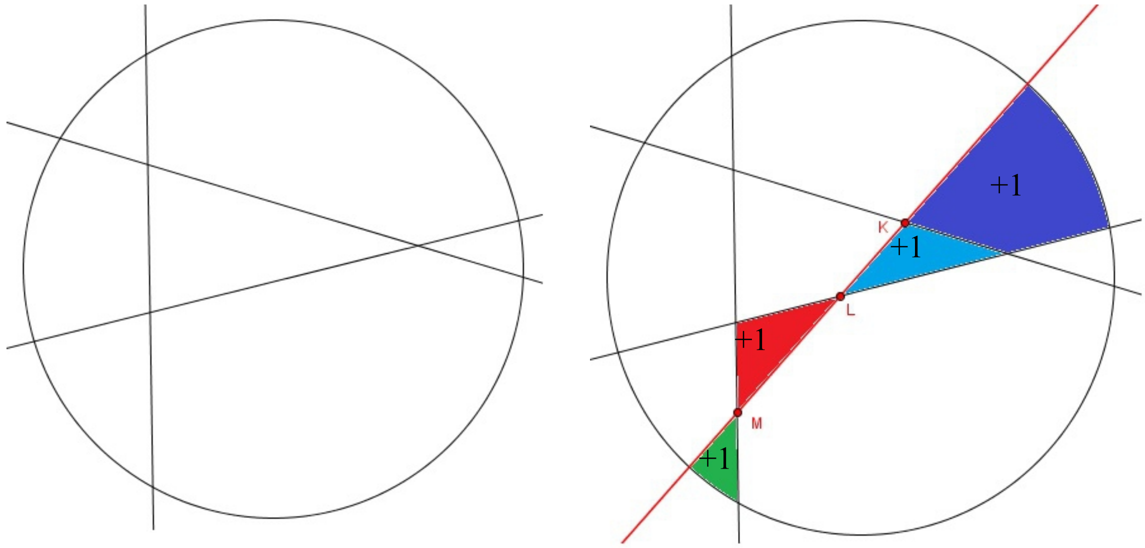
S=1+2+...+n-2+n-1 =	1	+2	+3	+...	+n-3	+n-2	+n-1
+S =	+ n-1	+n-2	+n-3	+...	+3	+2	+1
	=	=	=	=	=	=	=
	+n	+n	+n	+ ...	+n	+n	+n

Donc Sx2= nx(n-1)
Donc $S=\frac{n x(n-1)}{2}$

Nous avons en fait calculé 2S, en mettant les termes dans un sens, puis dans l'autre. Ainsi, en additionnant les colonnes, nous trouvons à chaque fois « n ». Et comme il y a n-1 termes, la somme des n-1 premiers entiers vaut donc S=nx(n-1)/2

<u>Rapport entre les points de contacts et le nombre de parts.</u>

Exemple avec 3 coups de couteaux (donc 3 droites) ; puis un 4ème coup de couteau (4ème droite) :



Comme déjà vu, la 4ème droite doit couper les 3 précédentes. Donc on rajoute 3 points de contacts à ceux qui existaient avant : les points M, L et K.

Chaque nouveau point de contact rajoute une part « à gauche » (le point M rajoute la part verte ; le point L rajoute la part rouge), mais le dernier point de contact rajoute une part « à gauche », et une autre part « à droite » (le point K rajoute la part bleue claire et bleue foncée). (4)
Donc le nombre de parts qui se rajoute à chaque droite supplémentaire, c'est le nombre de points de contact que crée cette droite + 1.

Donc, pour trouver le nombre de parts total, il faut ajouter le nombre de parts précédentes plus le nombre de nouveaux points de contact plus 1.

Soit p(n) le nombre de parts pour n coups et c(n) le nombre de points de contact pour n coups , on a la formule :
p(n)= p(n-1)+nouveaux points de contact de n +1
p(n)=p(n-1)+ nombre de droites précédentes +1
p(n)=p(n-1)+(n-1)+1

Exemple avec n=4

Donc p(4)=p(4-1)+(4-1)+1
Donc p(4)=p(3)+3+1
Donc p(4)=(p(2)+2+1)+3+1
Donc p(4)=([p(1)+1+1]+2+1)+3+1
Donc p(4)=([{p(0)+0+1}+1+1]+2+1)+3+1
Or p(0)=1
Donc p(4)=([{1+0+1}+1+1]+2+1)+3+1
Donc p(4)=1+1+1+1+1+2+3+1
Donc p(4)=4+c(4)+1
Sachant que la formule des points de contact est c(n)= $\frac{n\times(n-1)}{2}$ et en généralisant l'exemple ci-dessus, on obtient :

Donc p(n)= n+ $\frac{n\times(n-1)}{2}$ +1

Ainsi, le nombre maximal de parts possibles avec n coups de couteaux est donné par cette formule.

IV-L'extension :

Sujet : Sachant qu'on a la possibilité de couper horizontalement, peut-on faire encore plus de parts ?

On décide que pour un nombre *n* de coups, on réserve le dernier coup de couteau pour couper horizontalement.
Donc on observe qu'on retrouve le nombre de parts précédent multiplié par 2.
Donc on a p(n) = p(n-1)x2

Si on décide de faire la même chose mais pour deux coups horizontaux, alors on aura le nombre de parts pour deux coups avant multiplié par 3.
Donc on a p(n) = p(n-2)x3

Même raisonnement pour quand on garde les trois derniers coups, les quatre...
Soit *r* le nombre de coups horizontaux,
Donc p(n) = p(n-r)x(r+1) (5)

En entrant cette formule au tableur, on obtient le tableau suivant :

Nombre de parts méthode basiqu	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14
2													
4	4												
7	8	6											
11	14	12	8										
16	22	21	16	10									
22	32	33	28	20	12								
29	44	48	44	35	24	14							
37	58	66	64	55	42	28	16						
46	74	87	88	80	66	49	32	18					
56	92	111	116	110	96	77	56	36	20				
67	112	138	148	145	132	112	88	63	40	22			
79	134	168	184	185	174	154	128	99	70	44	24		
92	158	201	224	230	222	203	176	144	110	77	48	26	
106	184	237	268	280	276	259	232	198	160	121	84	52	28
121	212	276	316	335	336	322	296	261	220	176	132	91	56
137	242	318	368	395	402	392	368	333	290	242	192	143	98
154	274	363	424	460	474	469	448	414	370	319	264	208	154
172	308	411	484	530	552	553	536	504	460	407	348	286	224
191	344	462	548	605	636	644	632	603	560	506	444	377	308
211	382	516	616	685	726	742	736	711	670	616	552	481	406
232	422	573	688	770	822	847	848	828	790	737	672	598	518
254	464	633	764	860	924	959	968	954	920	869	804	728	644
277	508	696	844	955	1032	1078	1096	1089	1060	1012	948	871	784
301	554	762	928	1055	1146	1204	1232	1233	1210	1166	1104	1027	938
326	602	831	1016	1160	1266	1337	1376	1386	1370	1331	1272	1196	1106
352	652	903	1108	1270	1392	1477	1528	1548	1540	1507	1452	1378	1288
379	704	978	1204	1385	1524	1624	1688	1719	1720	1694	1644	1573	1484
407	758	1056	1304	1505	1662	1778	1856	1899	1910	1892	1848	1781	1694
436	814	1137	1408	1630	1806	1939	2032	2088	2110	2101	2064	2002	1918
466	872	1221	1516	1760	1956	2107	2216	2286	2320	2321	2292	2236	2156
497	932	1308	1628	1895	2112	2282	2408	2493	2540	2552	2532	2483	2408
529	994	1398	1744	2035	2274	2464	2608	2709	2770	2794	2784	2743	2674
562	1058	1491	1864	2180	2442	2653	2816	2934	3010	3047	3048	3016	2954
596	1124	1587	1988	2330	2616	2849	3032	3168	3260	3311	3324	3302	3248
631	1192	1686	2116	2485	2796	3052	3256	3411	3520	3586	3612	3601	3556
667	1262	1788	2248	2645	2982	3262	3488	3663	3790	3872	3912	3913	3878
704	1334	1893	2384	2810	3174	3479	3728	3924	4070	4169	4224	4238	4214
742	1408	2001	2524	2980	3372	3703	3976	4194	4360	4477	4548	4576	4564
781	1484	2112	2668	3155	3576	3934	4232	4473	4660	4796	4884	4927	4928
821	1562	2226	2816	3335	3786	4172	4496	4761	4970	5126	5232	5291	5306
862	1642	2343	2968	3520	4002	4417	4768	5058	5290	5467	5592	5668	5698
904	1724	2463	3124	3710	4224	4669	5048	5364	5620	5819	5964	6058	6104
947	1808	2586	3284	3905	4452	4928	5336	5679	5960	6182	6348	6461	6524

En regardant le tableau, on remarque que les cases où le nombre de parts est le plus grand se décale toutes les trois cases (cases violettes).
Nous ne l'avons pas démontré, mais nous avons vu que c'était le cas sur un nombre important de cases.

Est-ce vrai pour tous les cas et est-il possible de le démontrer ?

V- Conclusion

Nous avons résolu le problème en démontrant que le nombre maximal de parts pour n coups de couteau est donné par la formule : p(n)= n+ $\frac{n\times(n-1)}{2}$ +1

Et la formule pour l'extension est : p(n) = p(n-r)x(r+1) où r est le nombre de coups de couteaux horizontaux (donc r est plus petit ou égal à n). (6)

Il nous resterait à analyser le tableau de l'extension pour comprendre son fonctionnement.

Notes d'édition

(1) On pourrait ne pas donner immédiatement la formule du nombre de parts ; on commencerait par quelques observations à partir d'un petit nombre de coupes puis ensuite une conjecture serait formulée, puis démontrée.

(2) Le gâteau est représenté par un disque, les coupes réalisées par des cordes sur ce disque.

(3) On peut constituer au maximum 7 morceaux avec 3 coups de couteau.

(4) Réaliser une coupe sur une part crée bien deux parts, mais il est délicat de les désigner par celle "à gauche" et celle "à droite" ! (et si la coupe est horizontale ?)

(5) On pourrait détailler ces données sur des exemples !

(6) La formule pour l'extension n'est pas explicite puisque l'on ne sait pas quelle est la valeur du paramètre r.