Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans less notes d'édition.

# LES BULLES DE SAVON OU
# LES PLUS COURTS CHEMINS SUR UN POLYGONE

Année 2009 - 2010

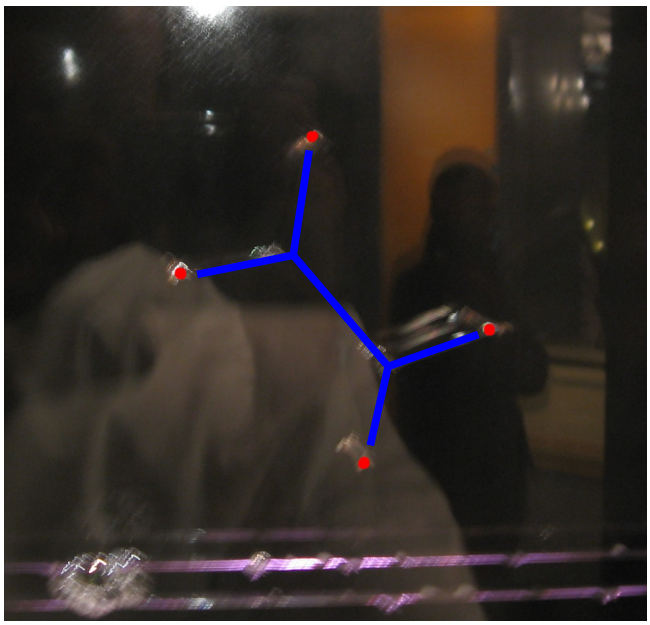
Elèves : Jean Mutillod, Thomas Duez, Robin Gaboriau, Jean-Baptiste Rippert, Julien De Nardo, Florent, Gardoni, première S

Etablissement : Lycée d'Altitude, Briançon

Professeur : Hubert Proal

Chercheur : Camille Petit, Université de Grenoble

Sujet :
On considère un polygone P sur lequel on cherche à construire le plus court chemin passant par tous les sommets. Physiquement cela revient à chercher comment un film de savon se disposerait pour relier tous les sommets d'un polygone.



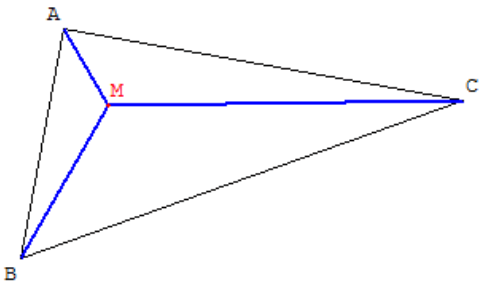
Film de savon entre deux plaques de verre.
En rouge les points et en bleu le chemin le plus court entre les points.

Le but de nos recherches a été de retrouver ce chemin (bleu) en connaissant seulement les points (rouges).

I. Le cas du triangle

On a un triangle ABC, on cherche à placer M tel que la distance AM+BM+CM soit minimale.

- Première idée :

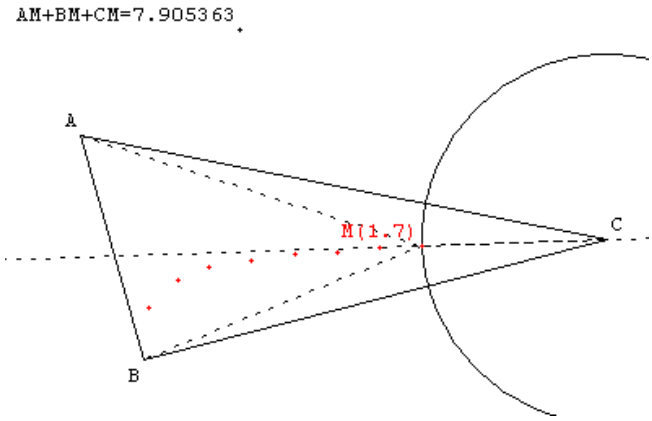



Tout d'abord, on a proposé que le point M était tel que les distances MA, MB et MC soient proportionnelles aux sommes des côtés touchant un même sommet, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{(AC+CB)}=\frac{BM}{(AB+AC)}=\frac{CM}{(AC+CB)}$$

Pour déterminer M, on a utilisé Géoplan. Malheureusement, le point qui minimise les distances ne vérifie pas la relation ci-dessus.

Avec le logiciel, pour déterminer la meilleure solution au problème, nous avions pris un point sur un cercle fixe de centre C et de rayon *r*. On a cherché à minimiser la distance sur ce cercle, on obtient un point M(*r*). Puis on a changé la valeur de *r* et regardé comment se plaçaient les différents points M(*r*).




Les points M(*r*) ne sont pas alignés.

- Deuxième idée :

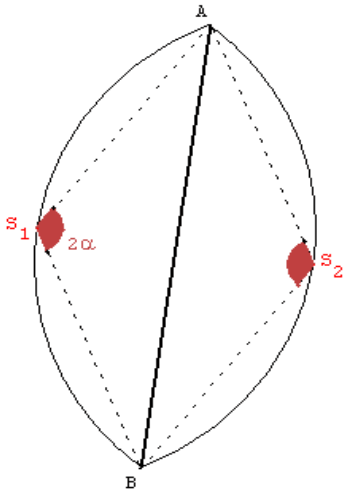
Nous avons ensuite pensé que le point M pourrait se trouver à l'intersection des 3 bissectrices des angles. Là encore, notre idée n'a abouti à aucun résultat.
Puis nous avons essayé avec les médianes et les médiatrices, mais là encore, aucun résultat.

- Troisième idée :

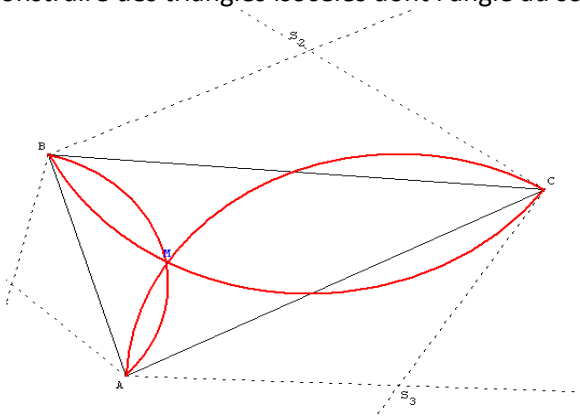
Après de nombreux essais, nous avons cherché la mesure des angles $\widehat{BMA}$, $\widehat{BMC}$, $\widehat{AMC}$, et nous avons remarqué que ces 3 angles sont égaux de mesure 120°.

- Construction :

Une propriété de 3ème (1) nous dit que l'ensemble des points qui voit un segment [AB] sous un angle constant $\alpha$ forme deux arcs de cercle passant par A et B de centre $S_1$, $S_2$ tel que $\widehat{BS_1A}=2\alpha$ et $\widehat{BS_2A}=2\alpha$

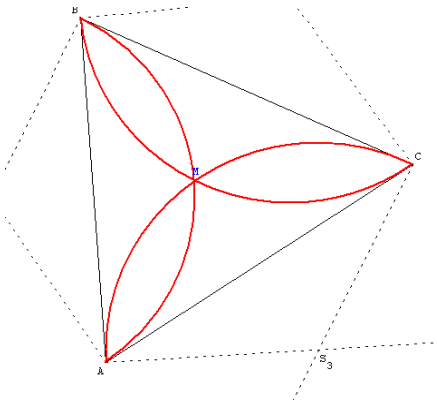



Par la suite, nous appliquons cette propriété à tous les segments du triangle ABC. Vu que nous voulons des angles de 120°, il nous faudra construire des triangles isocèles dont l'angle au sommet fait $2 \times 120 = 240$

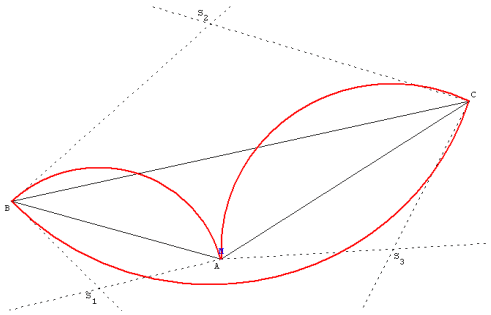



A l'intersection de tous ces arcs de cercle on trouve le point M qui donne le plus court chemin entre les sommets du triangle. On appelle ce point le point de Torricelli.

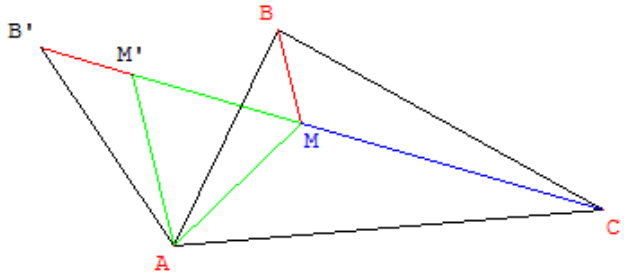
Remarque : lors de nos recherches, nous avons constaté que si les trois arcs étaient à l'intérieur du triangle alors celui-ci était équilatéral.




Il arrive que ces trois arcs ne se coupent pas. Par exemple quand l'angle en A est supérieur à 120°, dans ce cas le plus court chemin est BA+AC



- Démonstration que ce point est le bon :

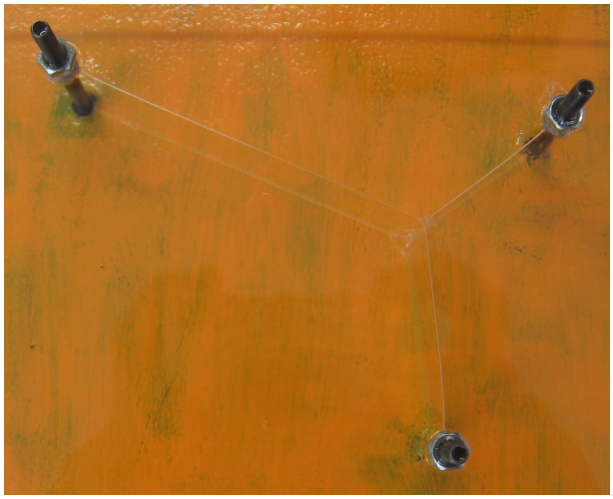


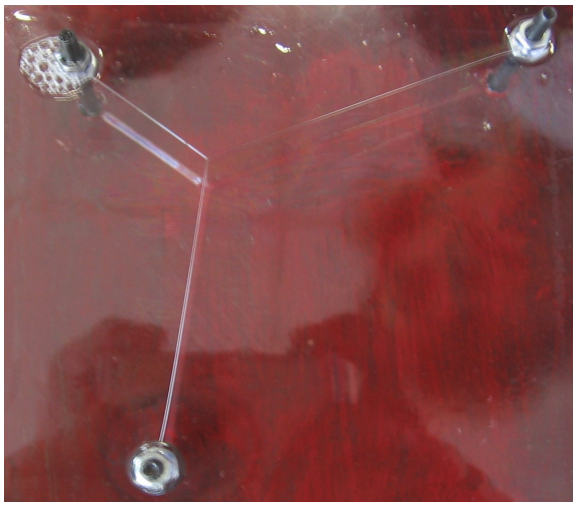

Nous avons fait une rotation de 60° de centre A des points B et M, pour obtenir les points B' et M'.
AM = AM' et BM = B'M' car la rotation conserve les longueurs.
On remarque alors que AMM' est équilatéral (isocèle et l'angle fait 60°)
Ainsi BM+AM+CM=B'M'+M'M+MC
Or B'M'+M'M+MC est minimal et vaut B'C quand les points M' et M sont alignés avec B' et C.
Justement si l'angle au centre est de 120° les points sont alignés. (2)
Preuve :
* L'angle $\widehat{B'M'A}$ est l'image de $\widehat{BMA}$ par la rotation (qui conserve les angles) donc $\widehat{B'M'A}$ =120°.
M'MA est équilatéral donc $\widehat{MM'A}$ =60°.
Alors $\widehat{B'M'M}$ =120+60=180°.
M' aligné avec B' et M.

* M'MA est équilatéral donc $\widehat{MM'A}=\widehat{M'MA}$ =60° de plus $\widehat{AMC}$ =120°.
Alors $\widehat{M'MC}$ =120+60=180°.
M' aligné avec M et C.
**Donc B', M', M et C sont alignés.**

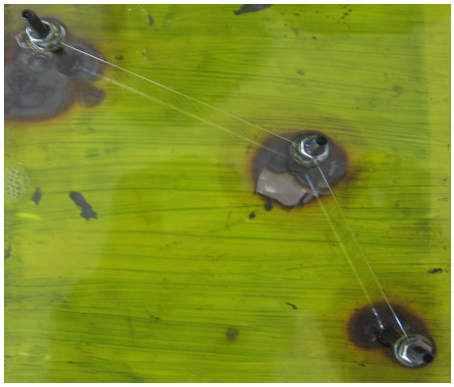
II. Vérifications expérimentales

Après avoir fait toutes nos recherches, nous avons construit des maquettes pour vérifier nos résultats.



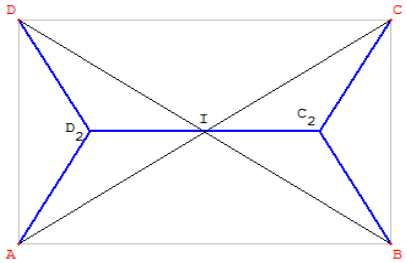


Même dans le cas où un angle dépasse les 120°.



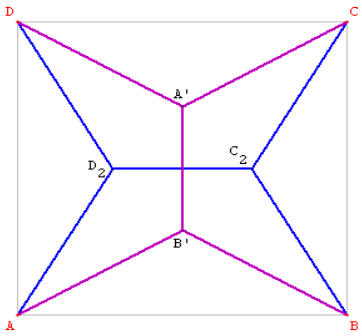
III. Le cas du quadrilatère

Comme nos collègues des triangles, nous avons commencé par des quadrilatères simples comme le carré, le rectangle ou le losange. Une des grandes difficultés dans la cas du quadrilatère est que nous n'avons pas à chercher un point mais deux. En effet les plus courts chemins prennent une forme de sablier.

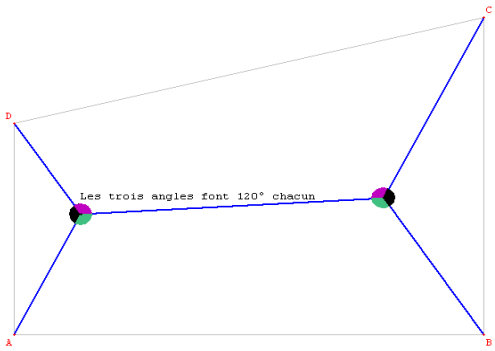



Lors des échanges durant le congrès, nous avons compris pourquoi nous avions une telle forme pour les chemins les plus courts. En effet si nous prenons un rectangle, on peut penser que les deux diagonales réalisent le chemin le plus court. Mais en fait elles se coupent en un point I et si on regarde les triangles formés avec deux points du rectangle et le point I, d'après les résultats précédents le chemin avec le point de Torricelli du triangle est le meilleur.

Nous avons remarqué que pour le carré et pour le losange nous avons deux chemins les plus courts.



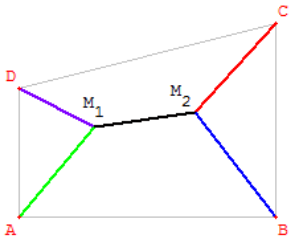

A force de plusieurs essais et lors de la même séance que nos collègues des triangles, nous avons remarqué que les angles de nos « sabliers » faisaient 120 °



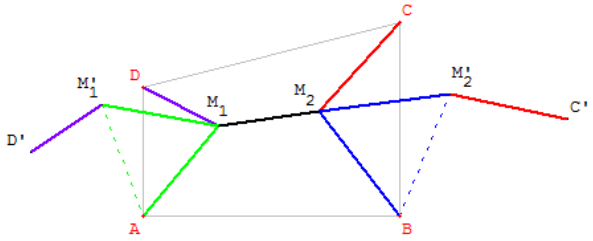

A partir de cette remarque et comme pour le cas des trois points, on a pu construire le plus court chemin et démontrer que c'était le meilleur.

**Démonstration du plus court chemin dans le cas du quadrilatère.**

On considère un quadrilatère ABCD et $M_1$ $M_2$ deux points. On souhaite démontrer que les angles $\widehat{DM_1A}$ et $\widehat{AM_1M_2}$ font 120° chacun dans le cas où $DM_1+M_1A+M_1M_2+M_2B+M_2C$ est minimum.



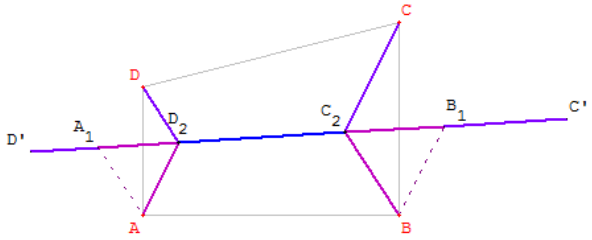

Nous notons D' et $M'_1$ les images de D et $M_1$ par la rotation de centre A et d'angle 60°. De même $M'_2$ et C' les images de $M_2$ et C par la rotation de centre B et d'angle -60°.




On peut montrer que $D'M'_1=DM_1$, $M'_1M_1=AM_1$, $M_2C=M'_2C'$ et $M_2M'_2=M_2B$

Ainsi $DM_1+M_1A+M_1M_2+M_2B+M_2C$ représente la ligne brisée qui est minimale quand elle n'est plus brisée, c'est-à-dire si $\widehat{D'M'_1M_1}=180°$ et $\widehat{M'_1M_1M_2}=180°$

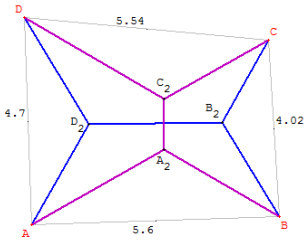
Or le triangle $AM_1M'_1$ est équilatéral et $\widehat{D'M'_1A}$ est l'image de $\widehat{DM_1A}$ par la rotation, mais ce dernier vaut 120° donc $\widehat{D'M'_1A}=120°$ (3)

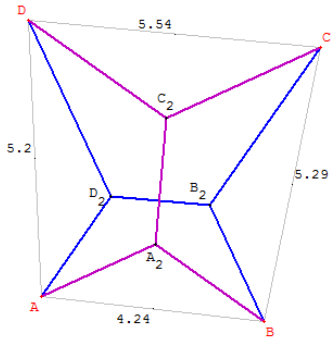



Ce qui nous donne $\widehat{D'M'_1M_1}=180°$

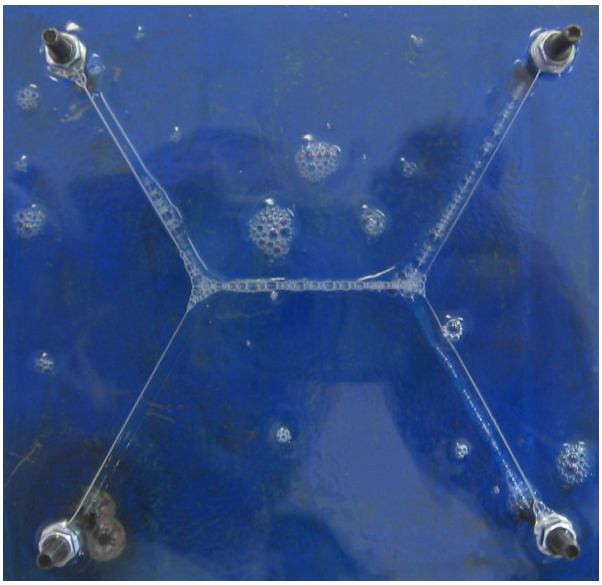
De la même manière nous arrivons à montrer que la ligne n'est pas brisée si tous les autres angles font 120°.

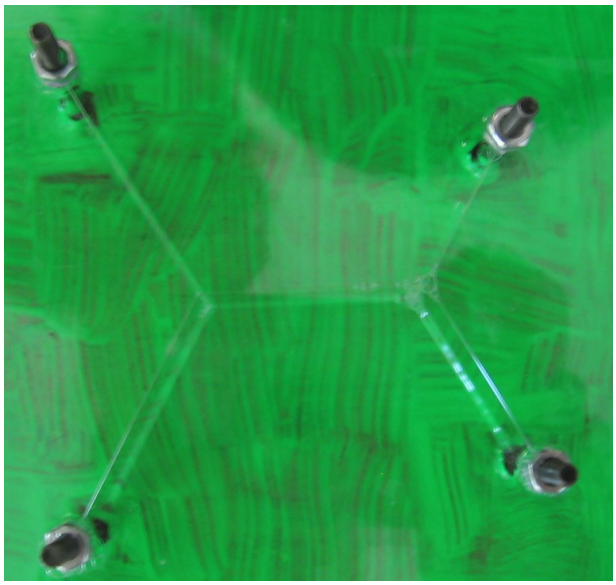
Mais la difficulté que nous ne sommes pas encore parvenu à résoudre est celui de savoir sur quels côtés « s'appuie » notre sablier ?



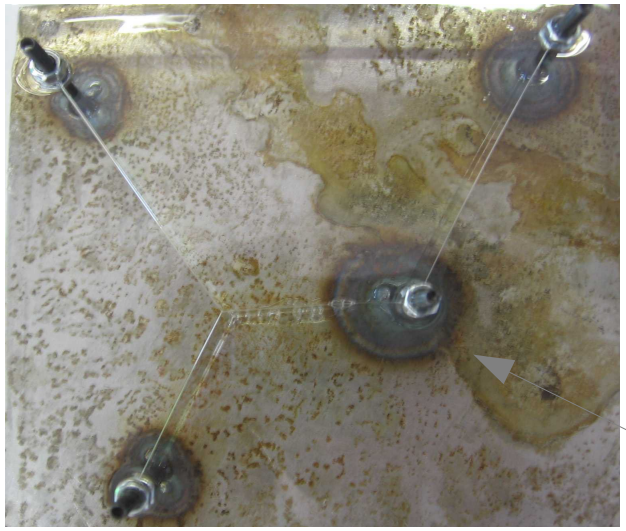



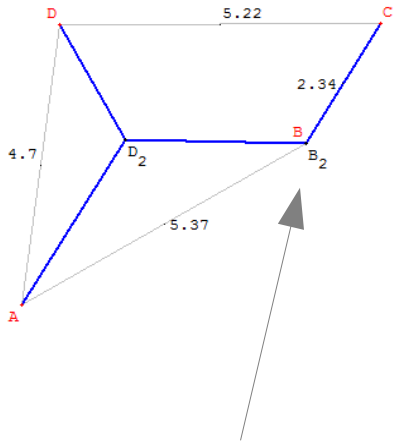

Dans le premier dessin, le plus court chemin est le bleu, dans le deuxième le mauve.
Nous avons conjecturé que le sablier s'appuie sur les côtés dont la somme est la plus petite.





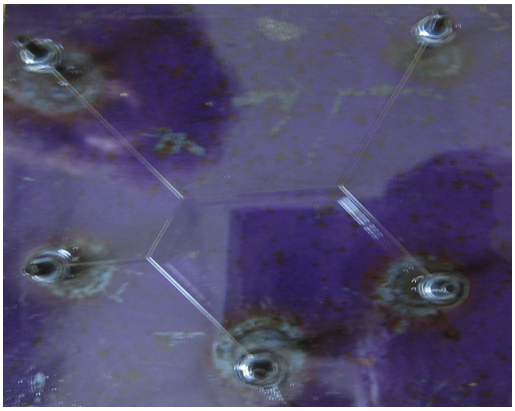
Que se passe-t-il quand un des sommets du quadrilatère se confond avec un des deux points du sablier ?



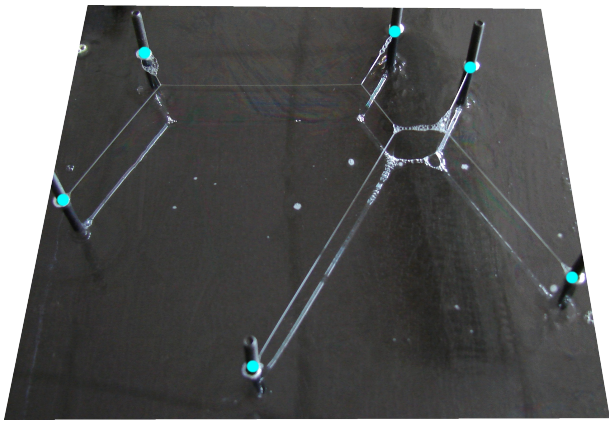


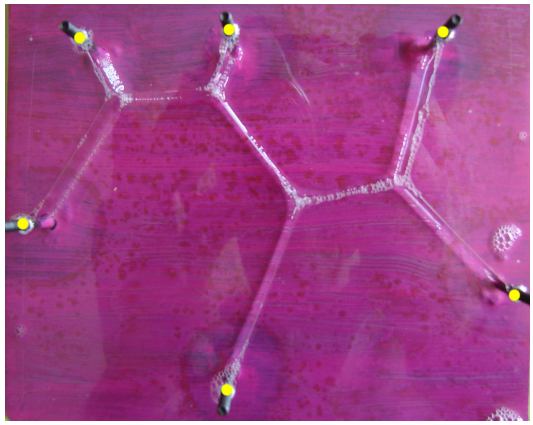

Le sommet B se confond avec un des points du sablier.

Il semblerait alors que nous ayons un point de Torricelli dans le triangle ADB et le segment [BC], mais quel triangle prendre pour le point de Torricelli ?



Pour essayer de mieux comprendre les quadrilatères nous avons un peu cherché du côté des pentagones mais nos résultats n'ont pas abouti.
Là aussi le congrès nous a fourni une piste de recherche, il semblerait que pour un polygone à *n* côtés (sans angle trop grand), nous pouvons réaliser un graphe à *n*-2 points de Torricelli qui minimise les distances. Encore une piste à explorer.





**Notes d'édition**

(1) Il s'agit du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre.
(2) Ici on parle des angles au centre $\widehat{BMA}$ , $\widehat{CMA}$ et $\widehat{BMC}$ .
(3) Attention, sur cette figure les points ne correspondent pas tous à à leurs noms dans le texte. Il faut renommer $A_1$, $D_2$, $C_2$ et $B_1$ respectivement en $M'_1$, $M_1$, $M_2$ et $M'_2$.