Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les bras articulés

2018-2019

Élèves : Tristan Dullin (TS), Lino Gamba (TSTL)

Établissement : Lycée Stéphane Hessel, Vaison la Romaine

Enseignants : Valérie Larose, Michaël Vœux

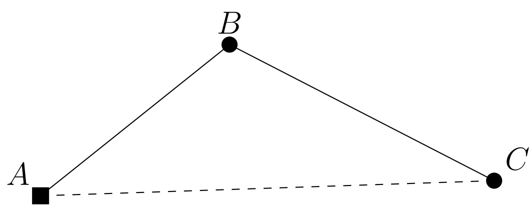
Chercheur : Thierry Barbot, Université d'Avignon
Lycée : Stéphane Hessel, Vaison la Romaine
Groupe : Tristan DULLIN et Lino GAMBA

Définition

Un bras articulé est une collection de segments de longueurs fixes et de points, fixes ou mobiles.

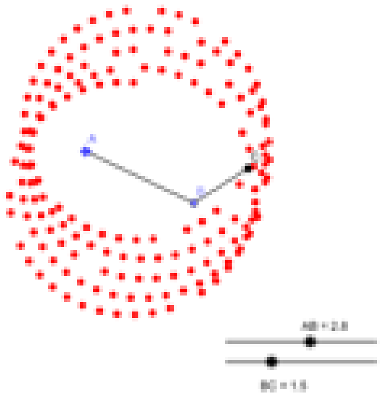
1 Bras articulés à deux segments

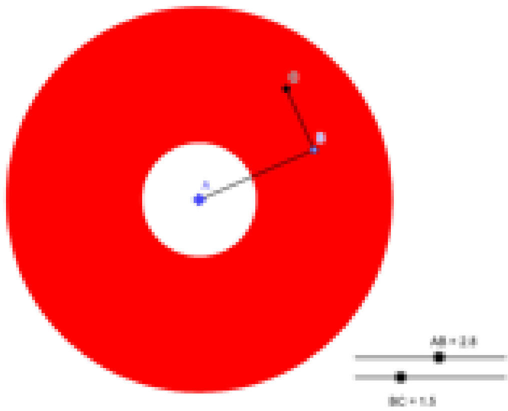
Afin d'étudier les bras articulés, on considère un cas simple: un bras composé de deux segments et trois points, dont un point fixe.



Nos trois points sont A, B et C ; A est notre point fixe. On s'intéresse au lieu de C, car, sur un bras articulé, il permet de se trouver à l'endroit le plus éloigné du point fixe, c'est toujours l'un des points les plus *utiles* du bras ; par exemple, en schématisant, le point A correspondrait à notre épaule, le point B à notre coude et le point C à notre main ; sur notre bras le point le plus éloigné de l'épaule est notre main (le point C), son éloignement nous permet d'attraper des objets à plus grande distance que si elle avait été placée sur notre coude (le point B). On a représenté des pointillés pour le segment $[AC]$, de sorte qu'apparaisse le triangle ABC.

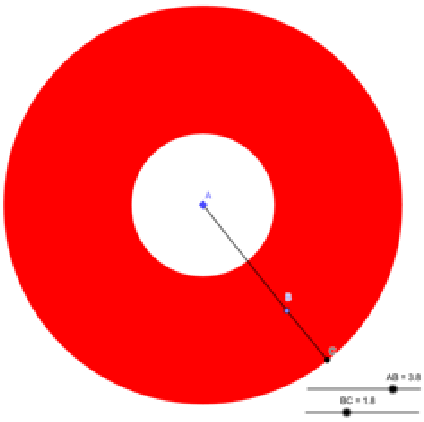
Sur *Geogebra*, on réalise une conjecture des positions possibles que peut prendre le point C. On colorie en rouge chacune des positions possibles de C. Grâce à *Geogebra* on fait varier la position des points en respectant les contraintes de notre bras articulé : la longueur des segments [1] et avoir un point fixe. On obtient les figures suivantes ; à gauche, après quelques secondes, à droite, après quelques minutes. [2]



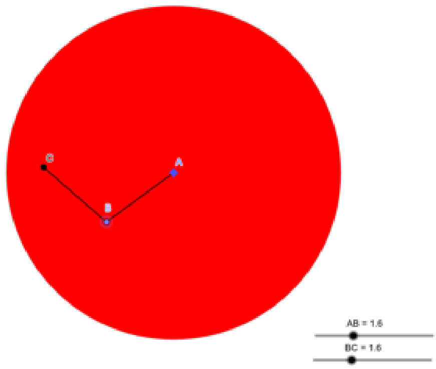


Pour ce cas, le lieu de C semble être un disque de centre A, auquel on aurait enlevé un autre disque de centre A, mais de rayon plus petit. On a choisi $AB > BC$. On a réalisé d'autres conjectures : pour $AB < BC$ on obtient le même résultat et pour $AB = BC$ il n'y a qu'un grand disque rouge.
Sur le cas où les trois points sont alignés, on remarque que la distance AC vaut $AB + BC$.

On peut définir le lieu de C plus rigoureusement. Le lieu de C semble être dans une couronne, c'est-à-dire une région limitée par deux cercles de même centre, le rayon du cercle intérieur est appelé rayon intérieur et le rayon du cercle extérieur est appelé rayon extérieur. Par la suite on va démontrer que le lieu de C est bien dans une couronne, ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un rayon extérieur ainsi qu'un rayon intérieur et que tout point de la couronne est une extrémité du bras.



Le cas où A, B et C sont alignés avec B entre A et C



Le cas $AB = BC$

Démonstration: Le rayon extérieur

ABC est un triangle quelconque, selon l'inégalité triangulaire, on sait que: $\begin{cases} AC + BC \geq AB \\ AB + AC \geq BC \\ \boxed{AB + BC \geq AC} \end{cases}$.

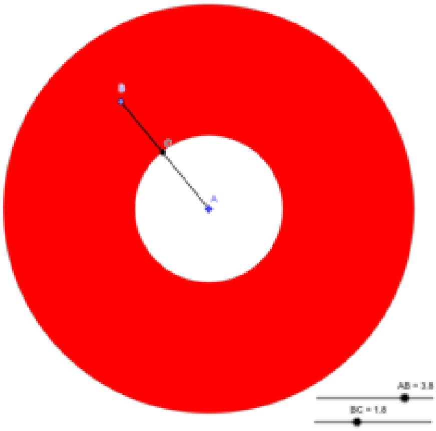
La troisième inégalité nous dit que la distance AC est plus petite ou égale à la distance $AB + BC$. C'est-à-dire que le lieu de C est contenu dans un disque de centre A et de rayon $AB + BC$. Dans ce disque se trouvent toutes les positions possibles du point C.

On vient de trouver le rayon extérieur de la couronne, il vaut $AB + BC$, il faut montrer que le rayon intérieur existe pour affirmer que le lieu de C est bien une couronne.

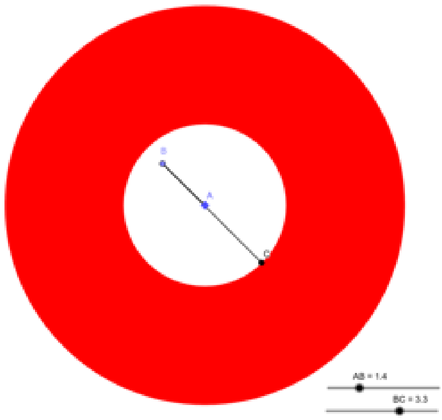
Sur *Geogebra*, on s'est rendu compte que trouver le rayon intérieur était plus compliqué que pour le rayon extérieur.
Sur ces images, on a manuellement essayé de placer le point C le plus proche possible du point A. On a supposé que le lieu de C était une couronne, alors lorsque C est le plus proche possible de A, le centre de la couronne, la distance AC correspond au rayon intérieur. Pour le cas $AB > BC$, le rayon intérieur correspondait à $AB - BC$. Et pour le cas $AB < BC$, le rayon intérieur correspondait à $BC - AB$. Il est donc nécessaire de distinguer les deux cas. On traitera aussi le cas $AB = AC$.

Démonstration: Le rayon intérieur

1. Premier cas: $AB > BC$



Le cas $AB > BC$



Le cas $AB < BC$

Selon l'inégalité triangulaire, on a:

$$\begin{cases} \boxed{AC + BC \geq AB} \\ AB + AC \geq BC \\ AB + BC \geq AC \end{cases} .$$

$AC + BC \geq AB \iff AC \geq AB - BC$
La première inégalité nous dit que la distance AC est plus grande ou égale à $AB - BC$. C'est-à-dire que le lieu de C n'a aucun point commun avec le disque de centre A et de rayon $AB - BC$. Pour ce cas, la couronne existe, elle est de centre A et a pour rayon intérieur $AB - BC$ et pour rayon extérieur $AB + BD$.

2. Deuxième cas: $BC > AB$
Selon l'inégalité triangulaire, on a:

$$\begin{cases} AC + BC \geq AB \\ \boxed{AB + AC \geq BC} \\ AB + BC \geq AC \end{cases} .$$

$AB + AC \geq BC \iff AC \geq BC - AB$
La deuxième inégalité nous dit que la distance AC est plus grande ou égale à $BC - AB$. C'est-à-dire que le lieu de C n'a aucun point commun avec le disque de centre A et de rayon $BC - AB$. Pour ce cas, la couronne existe, elle est de centre A et a pour rayon intérieur $AB - BC$ et pour rayon extérieur $AB + BD$.

3. Troisième cas: $AB = BC$ Selon l'inégalité triangulaire, on a:

$$\begin{cases} AC + BC \geq AB \\ \boxed{AB + AC \geq BC} \\ AB + BC \geq AC \end{cases}.$$

$AB + AC \geq BC \iff AC \geq BC - AB$
Or $AB = BC \iff BC - AC = 0$
Donc $AC \geq 0$
La deuxième inégalité nous dit que la distance AC est plus grande ou égale à $BC - AB = 0$. Dans ce cas-là, le rayon intérieur existe mais vaut 0, cela revient à dire que le lieu de C est un disque de centre A et de rayon $AB + BC$. [3]

De manière générale, il est possible de réunir les trois cas particuliers en disant que le rayon intérieur vaut $|AB - BC|$, la notation valeur absolue permet d'éviter d'avoir un rayon négatif.

Démonstration. [4] Tout point de la couronne est une extrémité du bras.
Soit M, un point quelconque de la couronne, on sait que $|AB - AC| < AM < AB + AC$.
M est-il une extrémité de la couronne ? C'est-à-dire, peut-on avoir $M = C$?
B est sur le cercle $\mathscr{C}(A; AB)$ et B est sur le cercle $\mathscr{C}\prime(M; BC)$.

$$\begin{cases} AC + BC \geq AB \\ AB + AC \geq BC \\ \boxed{AB + BC \geq AC} \end{cases}.$$

La troisième inégalité nous dit que la distance AC est plus petite ou égale à la distance $AB + BC$. C'est-à-dire que le lieu de C est contenu dans un disque de centre A et de rayon $AB + BC$. Dans ce disque se trouvent toutes les positions possibles du point C.

Enfin, pour montrer que tous les points de la couronne sont atteignables par C, il faut montrer que tout point de la couronne peut être l'extrémité du bras.

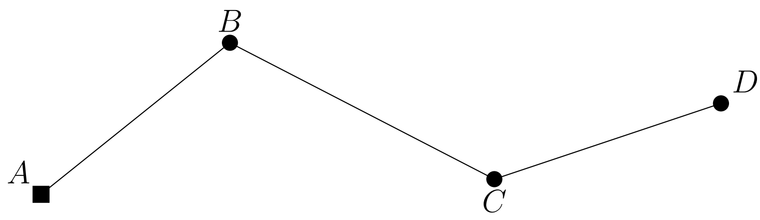
Démonstration. Soit M un point quelconque de la couronne, on a alors: $|AB - AC| < AM < AB + AC$. M est-il une extrémité du bras ? $\iff M = C$?
On sait que B est sur le cercle $\mathscr{C}(A; AB)$ et que B est sur le cercle

$\mathscr{C}'(M; BC)$.
Alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants, car $|AB - BC| < AM < AB + BC$. Donc M est bien une extrémité du bras.

Conclusion

Dans un bras articulé, à deux segments et trois points A, B, C, où A est fixe, le lieu de C est une couronne de centre A et de rayon extérieur $AB + BC$ et de rayon intérieur $|AB - BC|$.

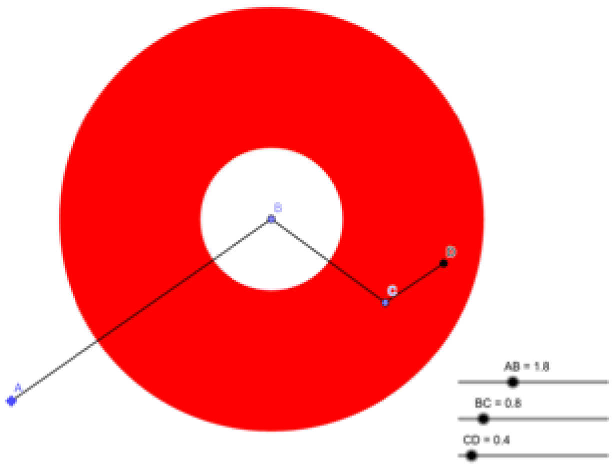
2 Bras articulés à trois segments



On part du même bras articulé que dans la partie précédente, en rajoutant un segment $[CD]$; cette fois, on n'étudie plus le lieu du point C car on l'a déjà déterminé, on étudie le lieu de point D. On se rend compte qu'étudier le lieu de D pour une position de B fixe revient à l'étude réalisée dans la partie précédente. En effet pour une position de B donnée, on se retrouve avec le même type de bras articulé que dans la partie une. On peut donc dire que lorsque B est fixe, le lieu de D est une couronne de centre B, avec pour rayon extérieur $BC + CD$ et pour rayon intérieur $|BC - CD|$.

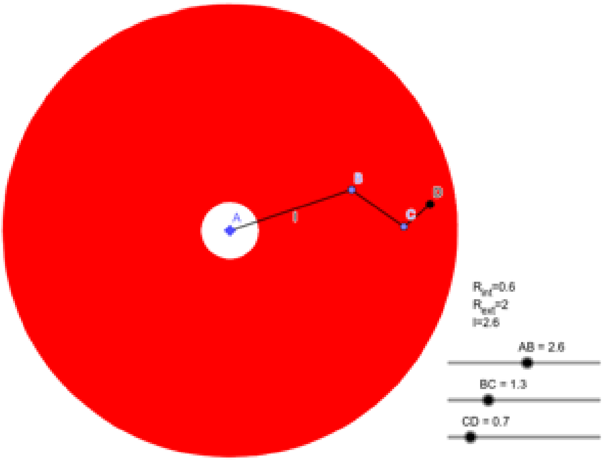
Néanmoins, le point B n'est pas fixe. Il se trouve à une distance fixe, AB, de A, son lieu trace tous les points éloignés de AB par rapport à A. Le lieu de B est donc un cercle de centre A et de rayon AB.

Le lieu de D est donc une couronne $(\mathscr{C}_1)$ dont le centre est le point C et le rayon extérieur $BC + CD$ et le rayon intérieur $|BC - CD|$. [5]



Lieu de D pour une position de B fixe

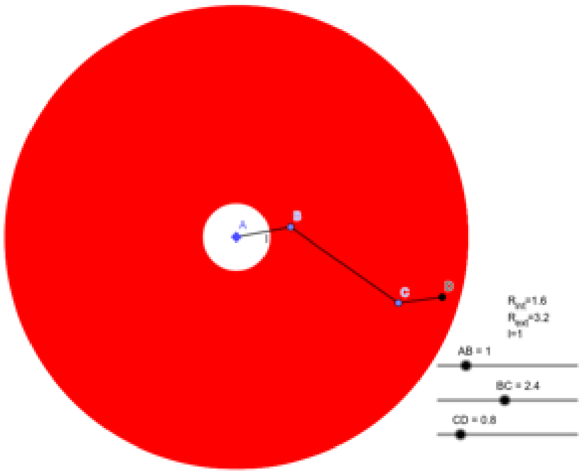
Sur *Geogebra*, on a réalisé une conjecture des différents cas possible pour le lieu de D. On a noté l la longueur AB et R_{ext} le rayon extérieur de la



1. Le cas $l > R_{ext}$

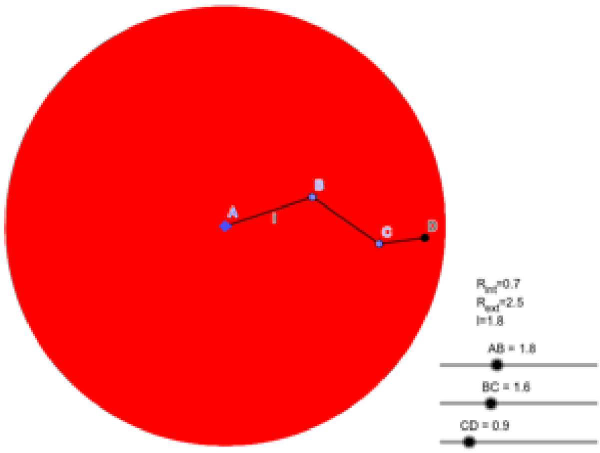
couronne $(\mathscr{C}_1)$ et R_{int} le rayon intérieur de la couronne $(\mathscr{C}_1)$. On a trouvé trois cas distincts:

Dans ce cas, le lieu de D décrit une couronne de centre A et de rayon extérieur $AB + BC + CD$ et de rayon intérieur $AB - R_{ext}$.



2. Le cas $l < R_{int}$

Dans ce cas, le lieu de D décrit une couronne de centre A et de rayon extérieur $AB + BC + CD$ et de rayon intérieur $R_{int} - AB$.

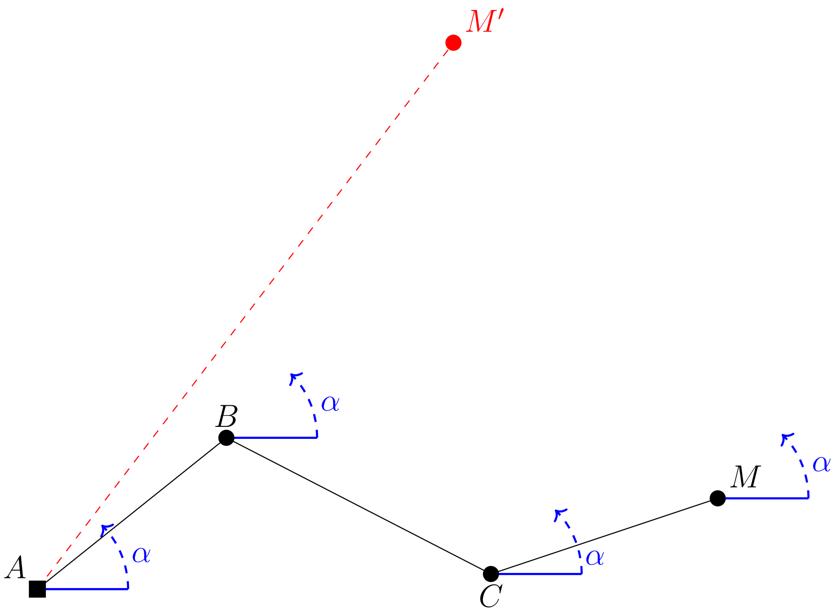


3. Le cas $R_{int} < l < R_{ext}$

Dans ce cas, le lieu de D décrit une couronne de centre A et de rayon extérieur $AB + BC + CD$ et de rayon intérieur 0. D décrit un disque de centre A et de rayon $AB + BC + CD$.

Dans la partie précédente, on a montré que $AB + BC > AC$, on a alors $AD \leq AC + CD$, donc D appartient au disque de centre A et de rayon $AB + BC + CD$.

L'invariance. Si une position du bras articulé à pour extrémité le point M, alors on a une autre position de M, M', en faisant tourner tous les points du bras articulé d'un angle α.



Dans cette rotation $R(A; \alpha)$, M a pour image M', $AM = AM'$ et $\widehat{MAM'} = \alpha$

[6]

On suppose que le point M appartient à la couronne. Selon l'invariance, si on atteint un point M de la couronne, alors M atteint tous les points du cercle de centre A passant par M.

Conclusion

Le bras articulé a trois segments et quatre points, A, B, C, D, où A est fixe est plus compliqué à étudier que le bras articulé à deux segments, étudié dans la première partie. Néanmoins, son étude peut être simplifiée en étudiant d'abord le bras articulé que forme les points B, C et D.

Notes d'édition

[1] La longueur de chacun des segments est fixée.

[2] Il faut comprendre qu'on a fait varier le point B (aléatoirement) et marquer les positions du point C à chaque variation de la position de B

[3] Pour le moment tout ce qu'on peut dire c'est que le lieu de C est contenu dans ce disque.

[4] On ne voit pas bien ce qui est démontré dans cette démonstration : il semble qu'on redémontre ici que le lieu des points C est contenu dans la couronne définie plus haut. On pourrait donc supprimer ce paragraphe.

[5] Suppose-t-on ici que le point C est fixe ? En fait, si le point C est fixe (ce qui n'est pas le cas), le lieu du point D est celui qui est décrit : cela permet de définir les deux longueurs R_{ext} et R_{int} qui sont utilisées pour énoncer les conjectures dans la suite.

[6] Cette propriété d'invariance est assez mal représentée sur cette figure ; en fait c'est tout le bras articulé qui éffectue une rotation d'angle α autour de A (voir la figure ci-dessous)