Une Blanche-Neige gourmande et futée

Année 2014 - 2015

**Elèves : Anna CAZENEUVE, 5°, Baptiste LUDERITZ, 5°, Marie NAMY, 5°,
Megan NZITA-JOHNSON, 4° et Charline LABENELLE, 4°**

Établissement : Collège de Marciac

Enseignants : Christophe PIGNON et Edelyne DE NODREST

Chercheuse : Agnès LAGNOUX, Université Paul Sabatier de Toulouse

I - Notre sujet

Une Blanche-Neige moderne troque sa pomme empoisonnée contre une plaque de chocolat dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Elle et sa belle-mère mangent à tour de rôle des carrés de chocolat selon la règle suivante : lorsqu'un carré est mangé, tous ceux en bas à droite sont éliminés. Blanche-Neige, étant la plus jeune, se propose de commencer.
Existe t-il une stratégie pour que Blanche-Neige gagne à tous les coups ?

II - Nos propriétés/nos résultats

1. **Le carré de 2x2**
   Si on a une tablette de chocolat de 2x2 carreaux, alors Blanche-Neige devra obligatoirement prendre le carreau en bas à droite pour gagner. (1)
2. **Le rectangle de 2xn ou nx2**
   Si on a une tablette de chocolat rectangulaire de longueur n et de largeur 2 alors, pour gagner, Blanche-Neige devra choisir le carreau en bas à droite.
3. **Les deux cases**
   La case se situant juste à droite du carreau empoisonné et celle juste au-dessous sont des cases particulières : le premier des deux joueurs qui en prend une a, dans tous les cas perdu et ce sera lui qui mangera le mauvais carreau.
4. **Les extensions des deux cases**
   Sur un carré, toutes les cases situées sur la même ligne et sur la même colonne que le carreau empoisonné ont le même rôle que les deux cases (voir ci-dessus). (2)
5. **Le carré de nxn**
   Si on a un carré de nxn carreaux, alors Blanche-Neige devra commencer par prendre le carreau B-2.(3)
   Ensuite, la belle-mère sera obligée d'éliminer une des extensions des deux cases fatales.

III - Nos méthodes de recherche

Pour commencer, nous avons essayé plusieurs parties. Nous avons alors trouvé le carré de 2x2, mais, malgré cela, les conclusions ne nous venaient pas très spontanément ; alors nous avons retroussé nos manches, et nous nous sommes mis à faire, par petit groupes, toutes les parties possibles sur, par exemple, une tablette de 2x4 carreaux (Blanche-Neige / la Belle-mère) :

3	2	1	
3	2		1

Blanche-Neige gagne

4	3	2	1
3	2	1	

La Belle-Mère gagne

4	3	2	1
4	3	2	1

Blanche-Neige gagne

3	3	2	1
2	1		

Blanche-Neige gagne

4	3	2	2
4	3	1	1

Blanche-Neige gagne

4	3	1	
2	2		1

Etc...

Après avoir dessiné toutes ces solutions possibles nous avons cherché à rassembler les tablettes où Blanche-Neige gagnait, et à trouver des points communs entre elles. Ce travail a porté ses fruits, nous avons découvert les propriétés du rectangle de 2xn ou nx2 et les deux cases.
Pour continuer notre recherche, nous avons utilisé un mini-jeu en ligne dont voici l'adresse :
http://jean-paul.davalan.pagesperso-orange.fr/jeux/nim/chomp/
C'est contre l'ordinateur que nous avons joué et quelques fois gagné... Durant cette expérience informatique nous avons approfondi et trouvé les propriétés des « extensions des deux cases » et du « carré de nxn » (voir les propriétés ci-dessus).

IV - Les démonstrations

Démonstration de la propriété n°1 (le carreau de 2x2) :
Si Blanche-Neige joue la case 1, la belle-mère, ne voulant pas perdre, est obligée de prendre la case 2 ou 3.
Si la belle-mère prend la case 2, alors Blanche-Neige prendra la case 3. Ce sera donc la belle-mère qui mangera le carreau empoisonné.
Et inversement, si la belle-mère choisit la case 3, alors Blanche-Neige prendra la case 2. Ce sera donc la belle-mère qui mangera le carreau empoisonné.

Donc en jouant la case 1, Blanche-Neige a une stratégie pour gagner obligatoirement. (4)

	3
2	1

Rouge : Blanche-Neige
Bleu : la belle-mère

Démonstration de la propriété n°2 (le rectangle de 2xn ou nx2) :

Il s'agit d'une introduction à la propriété n°3 : en effet, pour gagner, Blanche-Neige doit commencer par prendre le carré qui se situe tout à droite, en bas, de manière à gagner automatiquement. Nous appelons cela la technique de l'escalier : une fois cette case en bas à droite prise par Blanche-Neige, la belle-mère joue et prend, par exemple (et sur une plaquette horizontale), les 2 cases au-dessus et à gauche de la case qu'a prise Blanche-Neige. Ainsi, Blanche-Neige n'a plus qu'à compter le même nombre de cases sur la ligne (ou colonne) en-dessous de celle où a joué la belle-mère et prendre ces 2 cases. On conserve l'idée d'escalier, avec toujours une case de différence entre les 2 lignes (ou colonnes).

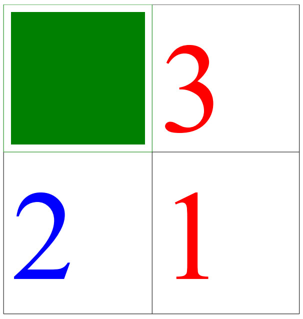
6	5	3		2	1	
5	4		3	2		1

3	2
3	2
1	
	1

Rouge : la belle-mère
Bleu : Blanche-Neige (5)

Démonstration de la propriété n°3 (les deux cases) :

Dans un carré de 2x2, si Blanche-Neige mange la case 1, il restera à la belle-mère les cases 2 et 3 à manger (comme le cas de la propriété n°1).
Nous avons donc découvert que le joueur mangeant en premier la case 2 ou 3 perd. En effet, si la belle-mère joue la case 2, Blanche-Neige jouera la case 3 et ce sera la belle-mère qui mangera le carreau empoisonné.
Et inversement, si la belle-mère la case 3, Blanche-Neige jouera la case 2 et ce sera la belle-mère qui mangera le carreau empoisonné.
Donc, de cette manière, Blanche Neige a une stratégie pour gagner automatiquement. (6)



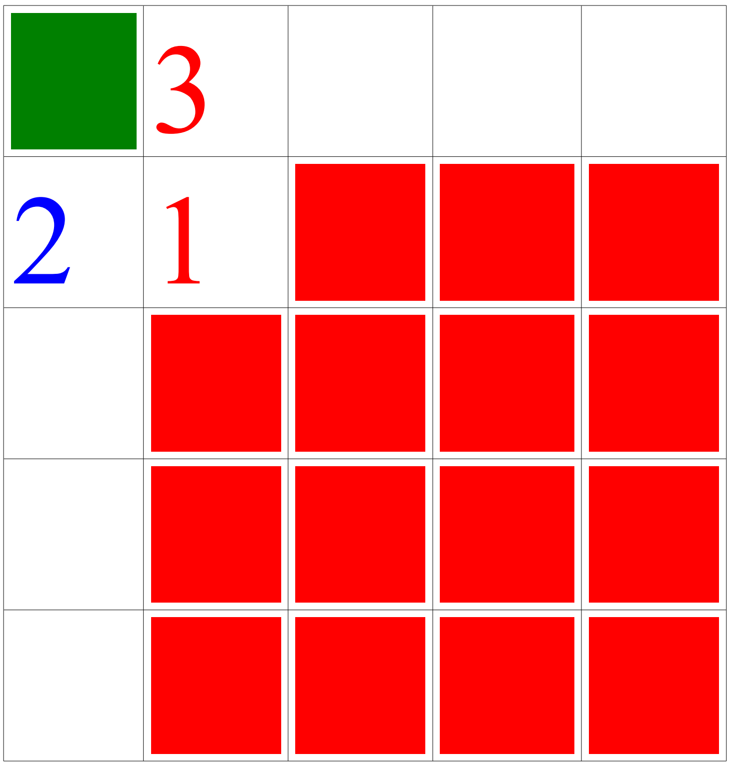
Rouge : Blanche-Neige
Bleu : la belle-mère

Démonstration de la propriété n°4 (les extensions des deux cases) :

C'est une extension de la propriété n°3.
Dans un carré de 2x2, si Blanche-Neige mange la case 1, il restera à la belle-mère les cases 2 et 3 à manger (comme le cas de la propriété n°1). En effet, toutes les cases situées sur la même ligne et sur la même colonne que le carreau empoisonné ont le même rôle que les deux cases. (7)

Démonstration de la propriété n°5 (le carré de nxn) :

Dans un carré de nxn, Blanche-Neige, en mangeant la case 1, élimine toutes les cases en dessous et à droite de la case. Il ne reste donc que les extensions des cases 2 et 3. La stratégie consiste à égaliser. En effet, la belle-mère sera obligée d'éliminer une case d'une extension : il ne nous restera plus qu'à égaliser le nombre de cases pris sur l'autre extension. Et ainsi de suite jusqu'à ce que la belle-mère mange la case 2 ou 3. Ce sera donc la belle-mère qui mangera le carreau empoisonné.
Donc, de cette manière, Blanche-Neige a une stratégie pour gagner obligatoirement.



Rouge : Blanche-Neige
Bleu : la belle-mère

V – Nos conclusions

Nous n'avons pas fini notre recherche, notamment concernant les rectangles autres que ceux de 2xn ou nx2. Nous avons trouvé, pour résumer, des tactiques pour gagner pour les carrés et les rectangles de nx2 ou 2xn. Pour les autres configurations, nous avons parfois réussi à gagner, mais la technique employée ne fonctionnait plus dans les autres cas. Nous n'arrivions pas à généraliser notre technique.

Notre hypothèse est que Blanche-Neige a certainement une stratégie gagnante, et nous avons une idée de « colonne de secours », à vérifier et à tester... Mais nous n'avons pas trouvé cette stratégie générale.

Notes d'édition

(1) On suppose que les deux joueuses jouent au mieux.

(2) Cet énoncé est assez mystérieux. Il est certain que ces cases jouent le même rôle, non pas pour une plaquette carrée, mais pour une plaquette sur laquelle on a déjà commencé à jouer, formée uniquement d'une ligne et d'une colonne.

(3) Il s'agit du premier carreau en diagonale en bas à droite du carreau empoisonné (ces deux carreaux se touchent par un coin).

(4) Pour démontrer que Blanche Neige doit obligatoirement prendre la case 1, on vérifie aisément que si elle prend la case 2 ou la case 3, la Belle-mère pourra la faire perdre.

(5) Attention, ici Blanche Neige est en bleu.

(6) Le dessin et le texte de la démonstration ne font explicitement référence qu'au cas 2x2, mais on se convainc aisément que l'argument est valide dans le cas général.

(7) La preuve n'est donnée ici que dans le cas 2x2. Dans le cas général nxn, il n'est pas évident de savoir exactement ce qu'il faudrait prouver, et a fortiori de fournir une démonstration, Il n'est pas clair du tout notamment que toutes les cases de la première ligne pour une plaquette carrée soient perdantes : cela signifierait en particulier que toutes les plaquettes rectangulaires sont gagnantes pour Blanche Neige... Quoi qu'il en soit, le résultat important est la propriété 5, qui est clairement argumentée.