LE BERGER ET SES MOUTONS

Année 2015-2016

Noms et Prénoms des élèves, niveaux : Ondine GAILLARD, Romane GUILLET et Natan STUER 5°.

Établissements : Collège de Marciac et Collège de Gramat

Enseignant-e-s : Mme De Nodrest Edeline et M Pignon Christophe

Chercheuses avec son université : Agnès Lagnoux de l' Université Toulouse II

Présentation du sujet :

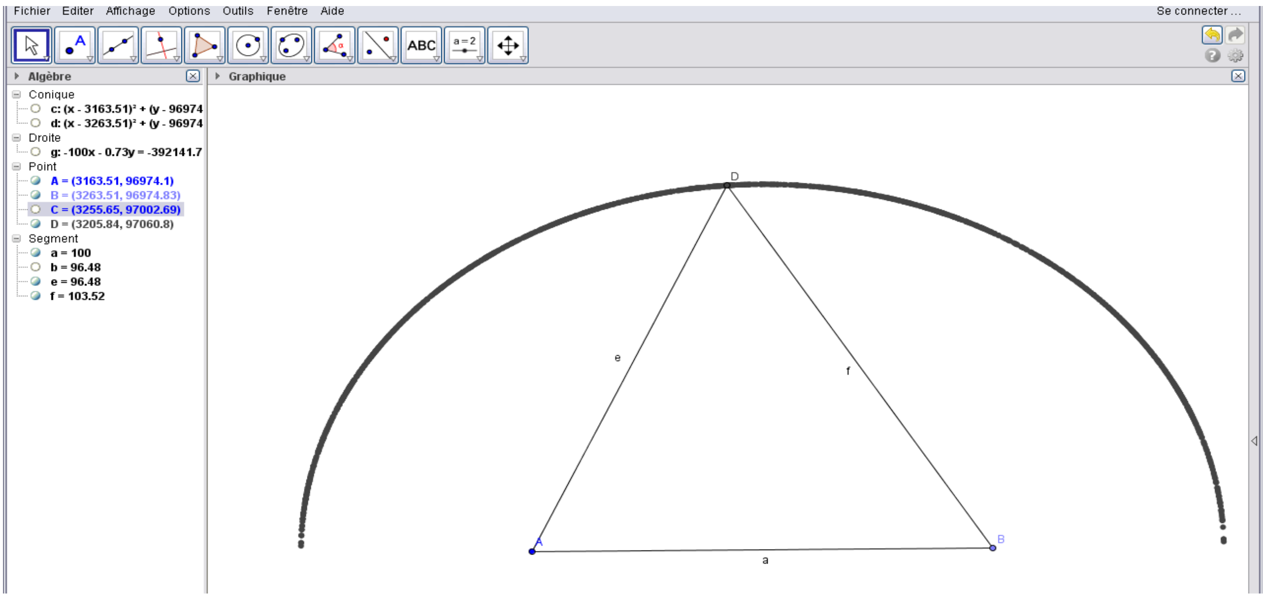
Un berger possède 300m de fil barbelé et 3 piquets. Comment doit-il placer ses piquets pour que ses moutons aient le maximum d'herbe à brouter?

Annonce des conjectures et résultats obtenus :

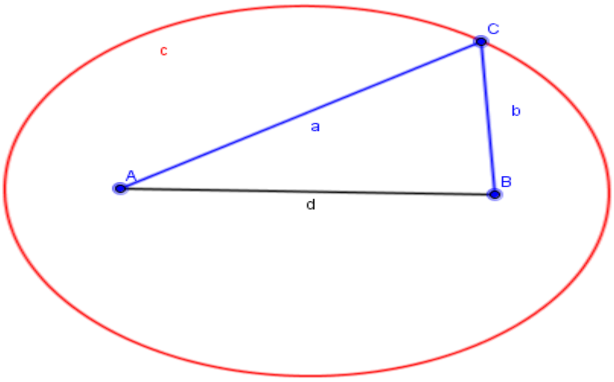
Nous avons prouvé que pour une base donnée c'est le triangle isocèle qui a l'aire la plus grande, et nous pensons que pour toutes bases confondues, c'est le triangle équilatéral de base 100 qui est le plus grand.

Texte de l'article :

1. D'abord, nous avons déduit que si nous devions trouver l'enclos le plus grand, cela voulait dire que nous devions trouver l'aire la plus grande.
2. Donc nous nous sommes rappellés que la formule pour trouver l'aire d'un triangle est « Base x hauteur : 2 ».
3. Ensuite nous avons tracé une multitude de triangles et nous avons conjecturé que le triangle équilatéral avait l'aire la plus grande (tout le reste de nos recherches est basé sur cette observation).
4. Nous avons construit un triangle de base AB de 100 m sur ordinateur et nous avons fait varier la hauteur. Ce qui nous a permis d'observer que le sommet de la figure décrivait une ellipse.



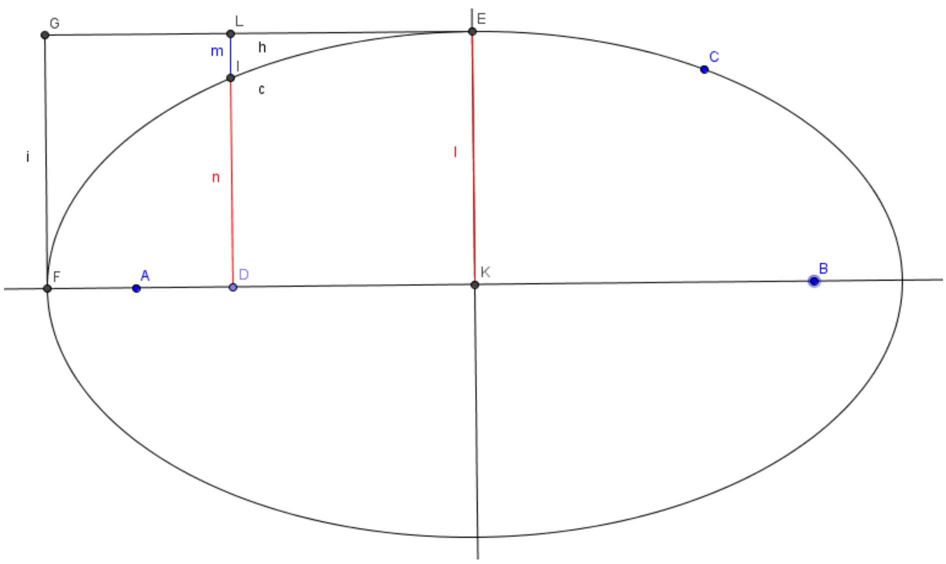
5. Nous avons donc cherché la définition de l'ellipse :
   <u>Définition bifocale (2 foyers) :</u>
   L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes *F* et *F'* est constante d'où la construction suivante :



En effet nous avions une base de AB de 100m, un périmètre de 300m donc AC+CB = 200m, A et B sont les foyers de l'ellipse et la somme des distances à ses points est bien constante. C' est pour cela que cette définition correspond à notre cas.

A ce point de notre recherche nous avons prouvé que les sommets de tous les triangles possibles ayant une base de 100m parcourent une ellipse. Parmi tous ces triangles nous cherchons a touver lequel a la plus grande aire.

Il a fallu expliquer pourquoi c'était quand le sommet du triangle se trouvait sur la médiatrice de la base que l'aire était la plus grande. Du coup, nous avons fait un schéma pour le voir :



Comme on fait *Base x Hauteur : 2* et que la base ne change pas , l'aire varie uniquement en fonction de la hauteur. Donc l'aire sera la plus grande lorsque que la hauteur est maximale.

Conclusion :

Pour les triangles ayant une base de 100 mètres, nous avons prouvé que le triangle équilatéral avait la plus grande aire.[1]

Autres bases :

Pour une base de longueur quelconque, la démonstration est la même que celle pour le triangle équilatéral, sauf que le triangle ayant la plus grande aire est le triangle isocèle de cette base.

Nous avons prouvé que les triangles ayant les plus grandes aires sont les isocèles, mais nous n'avons pas encore prouvé lequel parmi eux a l'aire la plus grande.

Nous conjecturons tout de même que le triangle équilatéral est le plus grand.[2]

Notes d'édition :

(1) A ce stade de l'article, les auteurs ont montré que si on fixe une base de 100m, le triangle bâti sur cette base et de périmètre 300m, qui a l'aire maximale est celui où les deux autres côtés sont égaux. Cette démonstration s'appuie la connaissance graphique d'une ellipse, et le fait que le point de hauteur maximale se trouve sur la médiatrice des deux foyers.
Une preuve strictement analogue montrerait que si on fixe une base de longueur L quelconque, le triangle d'aire maximale sera le triangle isocèle, dont les deux autres côtés sont de longueur (300-L)/2.

(2) Effectivement cette conjecture est juste : pour un périmètre fixé, le triangle d'aire maximale est le triangle équilatéral. Les auteurs auraient pu prouver ce résultat, en considérant un autre côté C, et en voyant de même que le triangle devait aussi être isocèle de base C. Ainsi on montre que le triangle doit être équilatéral.