La Bataille d'Eau
vs
Le Linge de Maman

Année scolaire 2016-2017

Élèves :
POTIER Laurie, RAJSKI Mathilde, LUCAS Angèle, élèves de Terminale S

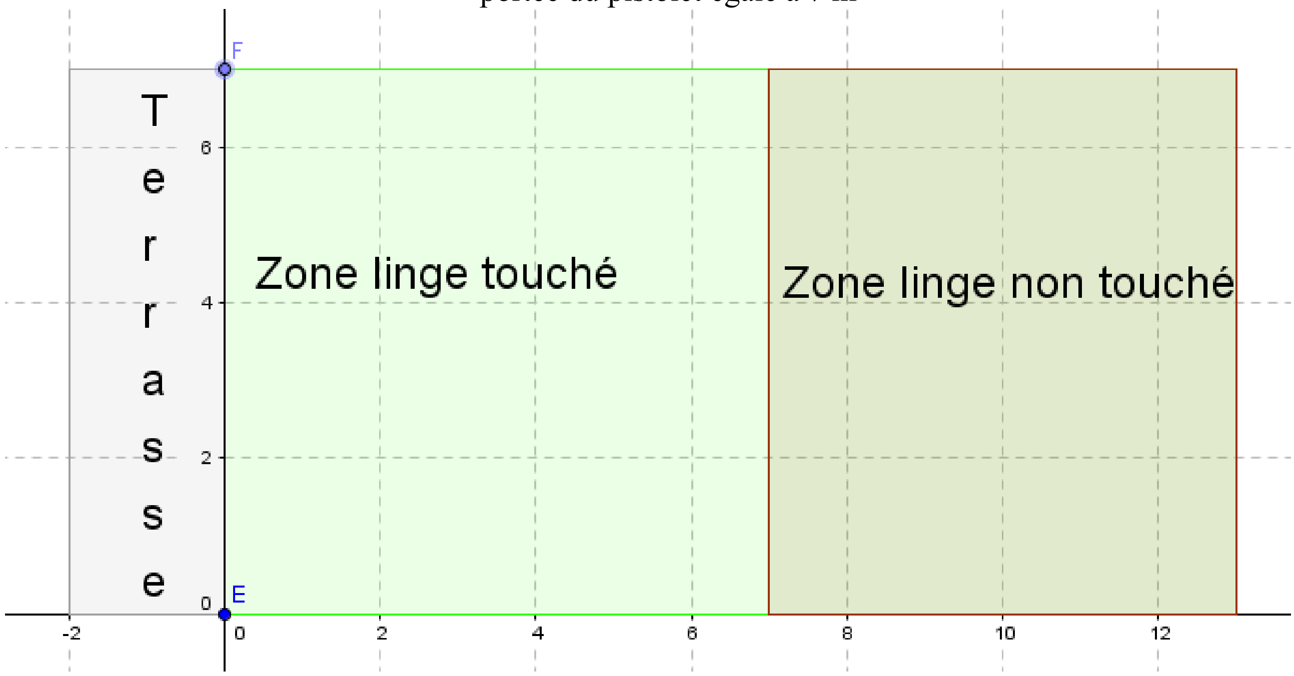
Encadrées par Mme DE VITTORI, Mme CHARNAY, Professeures de Mathématiques
Chercheur : M. SUQUET

I) Exposé du sujet et représentation avec GeoGebra

Nous nous plaçons dans un jardin où se trouve un enfant jouant au pistolet à eau. Or, dans le jardin, se trouve une terrasse sur laquelle la maman accroche son linge. L'enfant sera puni s'il touche celui ci.

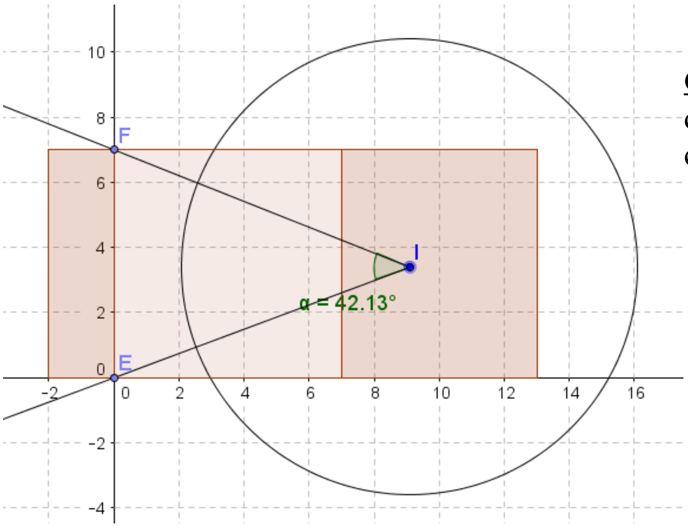
Notre but est de trouver la probabilité que l'enfant touche le linge en considérant comme aléatoires sa position dans le jardin et la direction du tir.

On pose quelques conditions :
→ un jardin de 15 mètres sur 7
→ une largeur de terrasse de 2m
→ portée du pistolet égale à 7 m

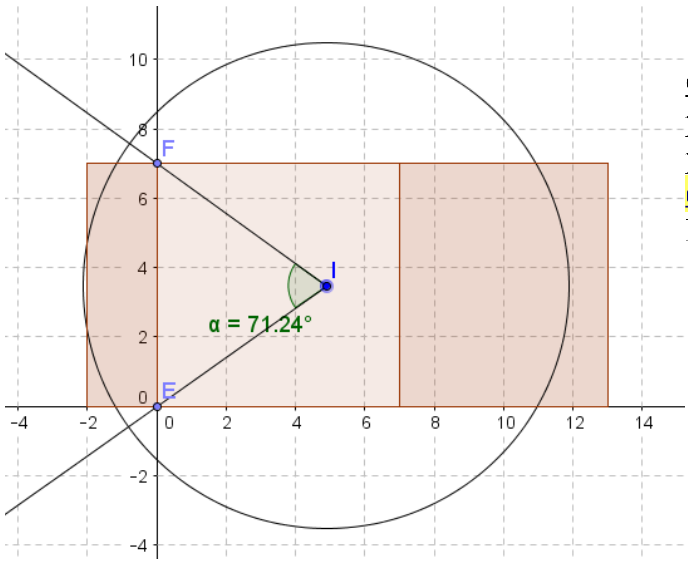


Après avoir respecté toutes les conditions, on a placé l'enfant dans le jardin en le représentant par un point I. Celui-ci peut tirer dans toutes les directions. On voit que, placé au delà de 7 mètres de la terrasse, la probabilité qu'il touche le linge est nulle et elle l'est également s'il est placé sur la droite d'équation $x=7$.(1)

Détaillons les cas possibles selon la position de l'enfant : on créé un cercle de centre I et de rayon 7 m pour représenter la portée du tir de l'enfant.

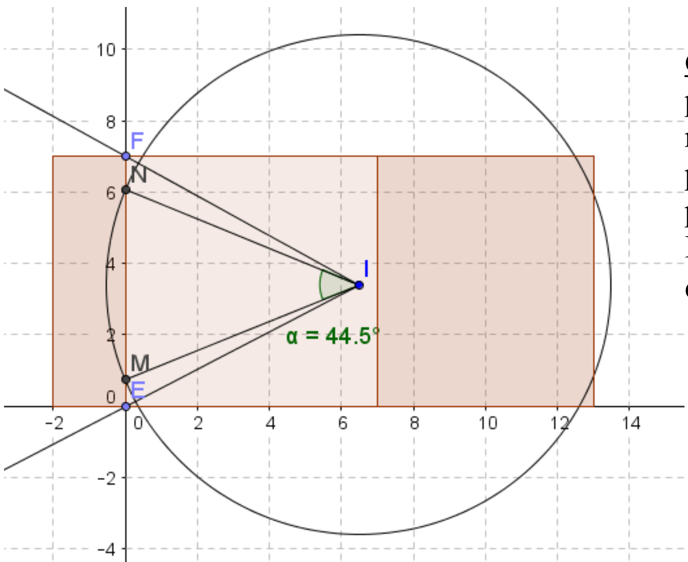


<u>Cas 1</u> : I est placé dans la zone où l'on est sûr que l’enfant ne touche pas le linge. On le voit car le cercle ne coupe pas [FE]



<u>Cas 2</u> : I est placé de telle façon que l'enfant puisse toucher la terrasse. Pour calculer la probabilité, on doit diviser l'angle α par 360. (2)

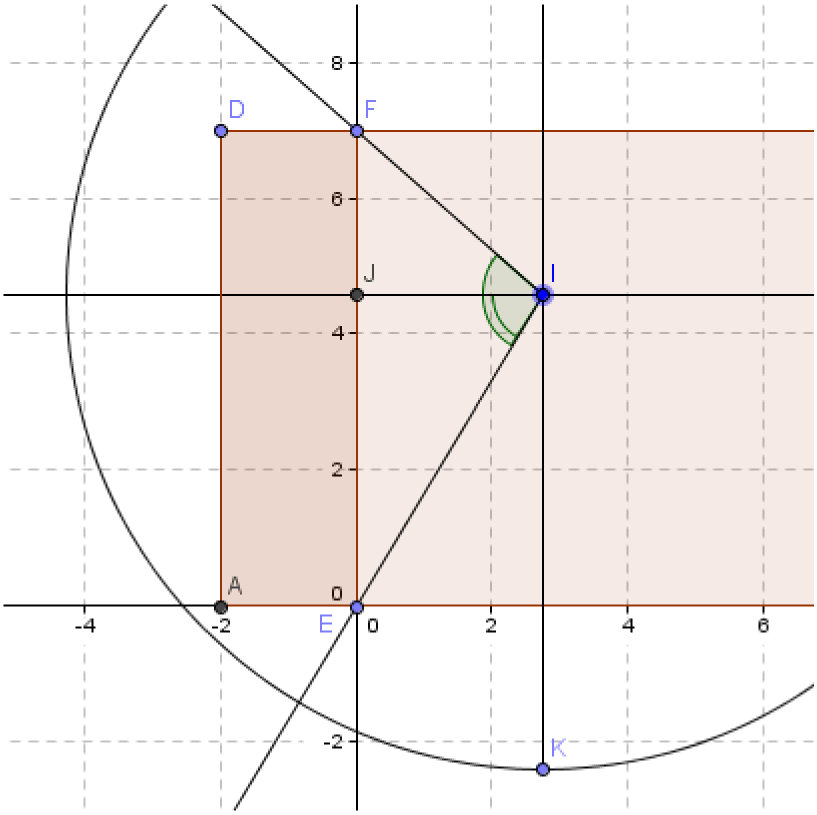
Par exemple, ici la probabilité vaut $\frac{71,24}{360}=0,198$



<u>Cas 3</u> : placé ici, l'enfant a également la possibilité de toucher le linge, mais le cercle représentant la portée du pistolet ne couvre pas entièrement le bord de la terrasse : les points M et N se sont créés.
L'angle α à prendre en compte pour le calcul est donc l'angle $\widehat{NIM}$.

II) Utilisation du tableur

Nous avons ensuite tenté de résoudre le problème avec le tableur. Pour cela, nous avons déterminé une fonction pouvant donner la probabilité que l'enfant touche le linge en s'aidant de la figure GeoGebra suivante.



On note $\mathrm{I}(x_0;y_0)$ les coordonnées du point I et on cherche à calculer la probabilité que l'enfant touche le linge depuis le point I en fonction de x_0 et y_0.
Pour cela, on reprend les cas 2 et 3 présentés dans la partie précédente pour lesquels la probabilité est non nulle.

<u>Cas 2</u> : la probabilité qu'il touche le linge se calcule donc en divisant l'angle $\widehat{FIE}$ par 360. On s'aide des relations trigonométriques en considérant que cet angle correspond à la somme des angles $\widehat{FIJ}$ et $\widehat{JIE}$.

On sait que $\tan(\widehat{FIJ})=\dfrac{opposé}{adjacent}=\dfrac{FJ}{JI}=\dfrac{7-yo}{xo}$ donc $\widehat{FIJ}=\arctan\left(\dfrac{7-yo}{xo}\right)$ et $\tan(\widehat{JIE})=\dfrac{opposé}{adjacent}=\dfrac{JE}{JI}=\dfrac{yo}{xo}$ ce qui équivaut à $\widehat{JIE}=\arctan\left(\dfrac{yo}{xo}\right)$

Par somme, $\widehat{FIE}=\arctan\left(\dfrac{7-yo}{xo}\right)+\arctan\left(\dfrac{yo}{xo}\right)$.

<u>Cas 3</u> : On a vu que dans certaines positions de l'enfant, l'angle était « rétréci » : on prend en compte l'angle $\widehat{MIN}$. Les points M et N sont sur un cercle de rayon 7 donc on peut utiliser l'équation de ce cercle pour trouver les ordonnées des points M et N.

Les coordonnées des points M et N vérifient : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=7^2$ et $x=0$.
d'où $x_0^2+(y-y_0)^2=7^2$ donc, on a $y-y_0=\sqrt{(49-x_0^2)}$ ou $y-y_0=-\sqrt{(49-x_0^2)}$.
Ce qui donne : $M\left(0\,;y_0-\sqrt{(49-x_0^2)}\right)$ et $N\left(0\,;y_0+\sqrt{(49-x_0^2)}\right)$

On obtient une formule qui permet de calculer l'angle α dans les deux cas 2 et 3 (que les points M et N existent ou pas) :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_o-Max(y_o-\sqrt{(49-x_o^2)};0)}{xo}\right) + \arctan\left(\frac{Min(y_o+\sqrt{(49-x_o^2)};7)-y_0}{xo}\right)$$

On utilise les commandes MIN et MAX pour tenir compte de l'existence ou non des points M et N.

Avec cette formule, on peut compléter une feuille de tableur en représentant le jardin par un quadrillage. Chaque cellule de la partie centrale représente un nœud de ce quadrillage où l'enfant peut se trouver et on calcule la probabilité de toucher le linge depuis cette position grâce à la formule suivante entrée dans C1 et tirée vers le bas et la droite : (3)

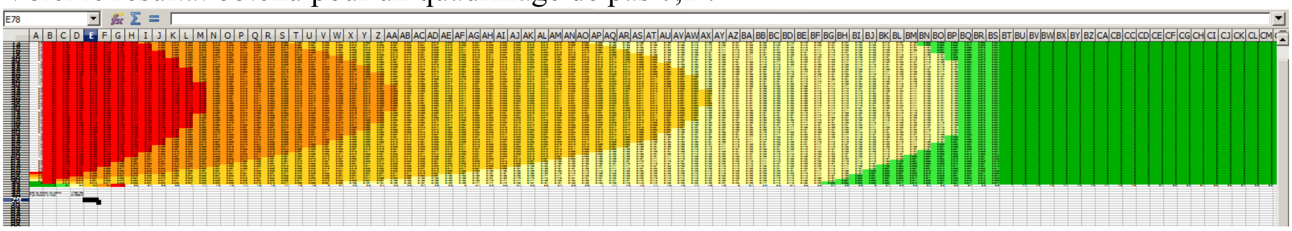
=(ATAN(($A1-MAX($A1-RACINE(49-C$9^2);0))/C$9)+ATAN((MIN($A1+RACINE(49-C$9^2);7)-$A1)/C$9))/(2*PI())

Voici le résultat obtenu pour un quadrillage de pas 1 :

C1 =(ATAN(($A1-MAX($A1-RACINE(49-C$9^2);0))/C$9)+ATAN((MIN($A1+RACINE(49-C$9^2);7)-$A1)/C$9))/(2*PI())

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	7	0,5	0,227	0,204	0,180	0,153	0,123	0,086	0,000	0,000
2	6	0,5	0,349	0,273	0,227	0,192	0,155	0,112	0,000	0,000
3	5	0,5	0,395	0,314	0,258	0,216	0,184	0,137	0,000	0,000
4	4	0,5	0,410	0,333	0,273	0,227	0,193	0,160	0,000	0,000
5	3	0,5	0,410	0,333	0,273	0,227	0,193	0,160	0,000	0,000
6	2	0,5	0,395	0,314	0,258	0,216	0,184	0,137	0,000	0,000
7	1	0,5	0,349	0,273	0,227	0,192	0,155	0,112	0,000	0,000
8	0	0,5	0,227	0,204	0,180	0,153	0,123	0,086	0,000	0,000
9		0	1	2	3	4	5	6	7	8
10										

Voici le résultat obtenu pour un quadrillage de pas 0,1 :

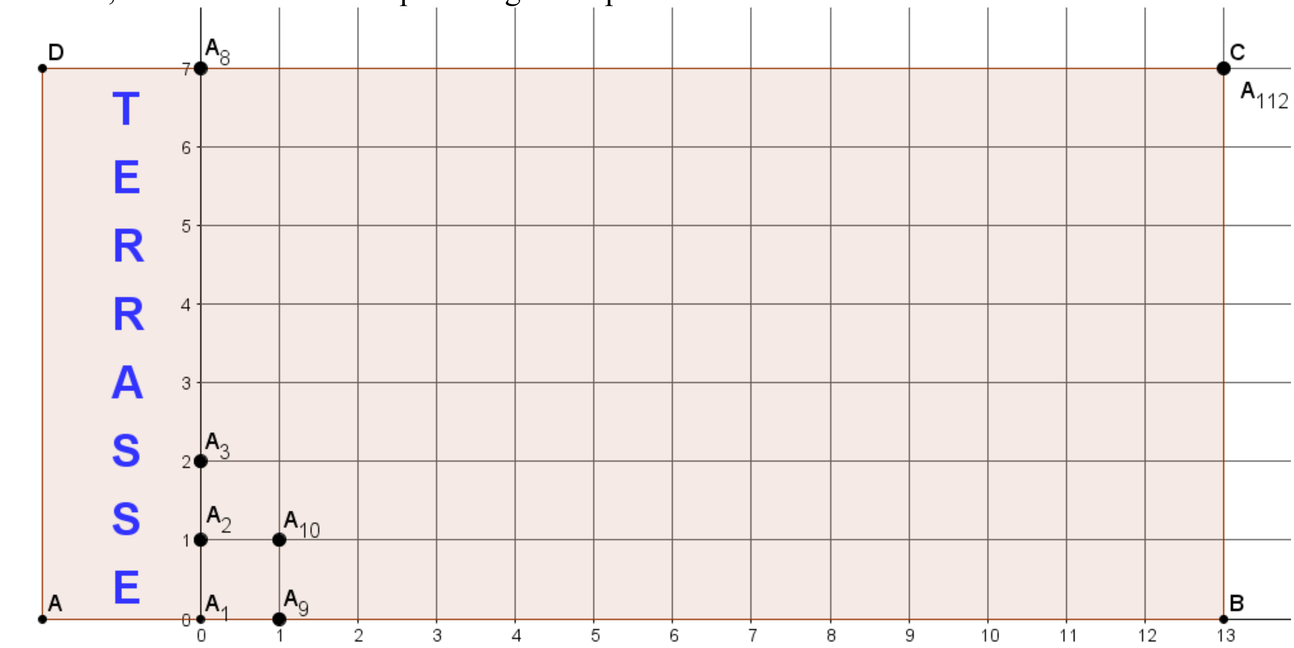


On a représenté chaque tranche de probabilité par une couleur spécifique : on remarque bien que plus on se rapproche de la terrasse et plus l'enfant risque de se faire punir.

<u>Calcul de la probabilité qu'il touche le linge</u> :

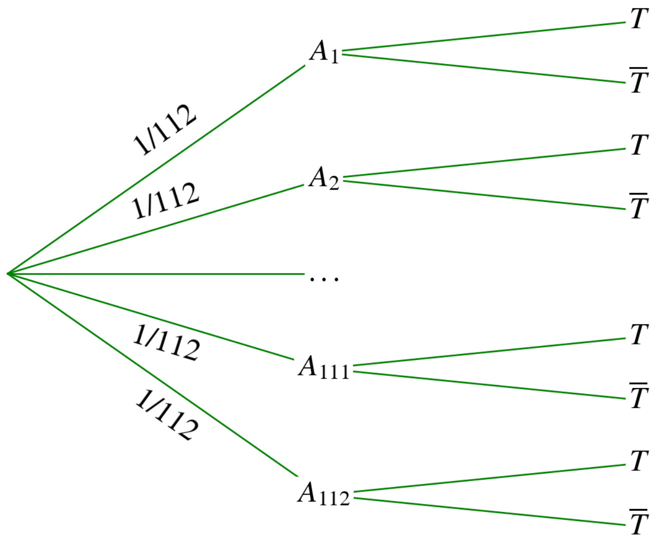
Nous avons calculé la probabilité que le tir touche le linge lorsque l'enfant est positionné sur un nœud de notre quadrillage. A partir de ces valeurs, nous pouvons obtenir une approximation de la probabilité cherchée (probabilité que l'enfant touche le linge).

En effet, étudions le cas où le quadrillage a un pas de 1 m :



On appelle A_1 , … , A_n les points situés sur les nœuds du quadrillages.
Il y en a 8*14=112 donc $n=112$.

Supposons que l'enfant soit placé aléatoirement sur les nœuds du quadrillage.
On appelle alors A_i l'événement « l'enfant est situé au point A_i » et T l'événement « l'enfant touche le linge ». On peut représenter l'expérience par un arbre à 112*2 issues :
Chaque point du quadrillage est choisi de façon équiprobable et a donc une probabilité de $\frac{1}{112}$:



La position de l'enfant étant choisie aléatoirement parmi les 112 points du quadrillage, on peut calculer la probabilité que le tir touche le linge en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(T)=P(A_1)\times P_{A_1}(T)+P(A_2)\times P_{A_2}(T)+\ldots+P(A_{111})\times P_{A_{111}}(T)+P(A_{112})\times P_{A_{112}}(T)$$
$$=\frac{1}{112}\times P_{A_1}(T)+\frac{1}{112}\times P_{A_2}(T)+\ldots+\frac{1}{112}\times P_{A_{111}}(T)+\frac{1}{112}\times P_{A_{112}}(T)$$
$$=\frac{P_{A_1}(T)+P_{A_2}(T)+\ldots+P_{A_{111}}(T)+P_{A_{112}}(T)}{112}$$

Les valeurs $P_{A_i}(T)$ sont les valeurs calculées dans les cases du tableur, ainsi, on voit qu'il suffit d'ajouter toutes les valeurs contenues dans les cases du tableur et de diviser par le nombre de cases. La valeur obtenue est la probabilité que l'enfant touche le linge lorsque sa position est choisie aléatoirement parmi les nœuds du quadrillage.

Lorsque le pas du quadrillage se rapproche de 0, cette valeur se rapproche de la probabilité cherchée puisque les nœuds du quadrillage vont finir par remplir tout le jardin.

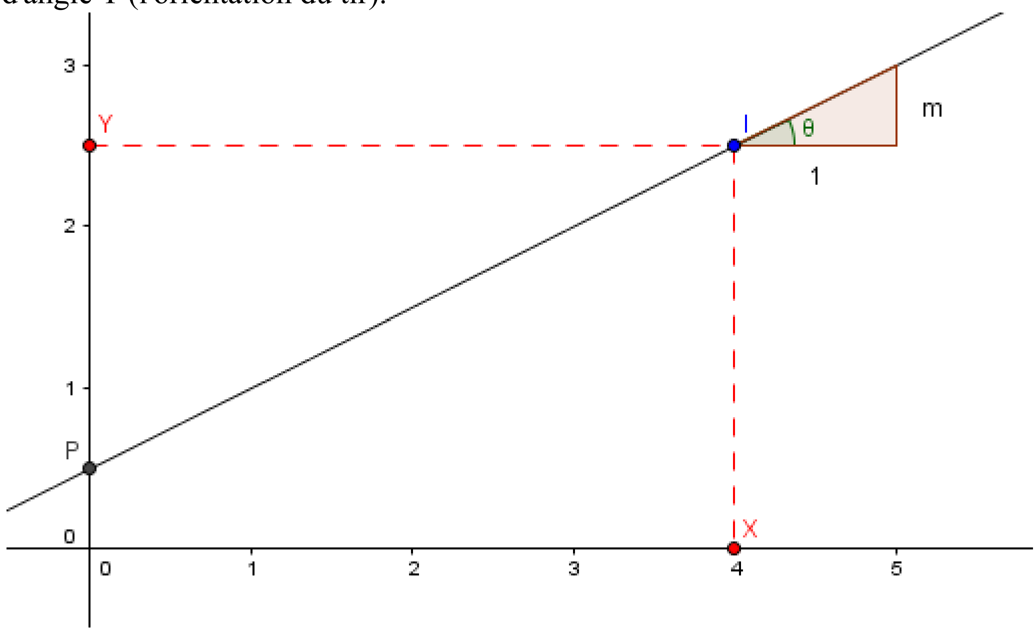
Avec un pas de tableur de 0,1, on trouve que $P\simeq 0{,}128$.

III) Simulation avec Xcas

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé une méthode d'approximation sans simulation basée sur des considérations géométriques. Nous allons maintenant essayer de confirmer le résultat obtenu en simulant un grand nombre de fois le choix au hasard de la position du tireur et la direction du tir.

Nous avons utilisé le logiciel Xcas pour simuler un très grand nombre de tirs avec un algorithme.

On met en place un compteur C qui compte le nombre de fois où l'eau va toucher le linge. Le logiciel prend au hasard une valeur de X (abscisse du point), une valeur de Y (ordonnée du point) et une valeur d'angle T (l'orientation du tir).



Connaissant $(x\,;y)$ les coordonnées du point I et l'angle T, on sait que le coefficient directeur de la

droite est : $m = \tan(\mathrm{T})$.
L'équation de la droite est donc $y = mx + \mathrm{P}$ et comme nous cherchons l'ordonnée à l'origine P, nous obtenons : $\mathrm{P} = y - mx$

On inclut une boucle "si" qui contient les 3 conditions permettant de toucher le linge :

- P, l'ordonnée à l'origine doit être supérieur à 0 et inférieur à 7 afin que le tir se finisse sur la terrasse et non à l'extérieur du jardin.
- La distance entre l'origine du tir et le linge doit être inférieur à 7m.
- L'angle T doit être supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et inférieur à $\frac{3\pi}{2}$ pour que le tir soit dirigé vers la terrasse.

Voici notre algorithme créé avec le logiciel Xcas :

```
saisir(N);
C:=0;
pour k de 1 jusque N pas 1 faire
 X:=alea(0,13);
   Y:=alea(0,7);
     T:=alea(0,2*pi);
       M:=tan(T);
       P:=Y-M*X;
       D:=sqrt(X^2+(Y-P)^2);
       si( (0<P) and (P<7) and (D<7) and (pi/2<T) and (T<3*pi/2)) alors C:=C+1 fsi;



fpour;
afficher(C);
  afficher(N);
    afficher(C/N)
```

Voici des résultats obtenus avec cet algorithme :
Nous avons fait deux simulations pour chaque valeur de n.

Nombre de tirs $n =$	100	1000	10000	100000	1000000
Fréquences des tirs touchant le linge.	0,11 0,17	0,121 0,129	0,1302 0,1255	0,12834 0,12999	0,128234 0,128289

Nous constatons que pour une même valeur de n, les simulations ne donnent pas la même fréquence, mais que lorsque n augmente, ces fréquences se rapprochent d'une valeur proche de 0,128. Ceci est cohérent avec le résultat obtenu dans la partie II.

IV) Conclusion

Pour conclure, après avoir envisagé plusieurs méthodes mathématiques, on trouve toujours une même probabilité qui est d'environ 0,128 pour l'enfant de toucher le linge.

Notes d'éditions

(1) On suppose que le linge est touché dès que le tir atteint le bord de la terrasse (on ne précise pas où se trouve exactement le linge sur la terrasse, d'où cette hypothèse).

(2) Comme le tir se fait de façon uniforme dans tous les directions possible, on en déduit que la probabilité de toucher la terrasse est proportionnelle à l'angle $\widehat{FIE}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à $\alpha/360$.

(3) En colonne A se trouve l'ordonnée du point I, et en ligne 9 son abscisse, dans le repère du départ.