Le barycentre sur la sphère

Année 2018-2019

Nom, prénom des élèves : Berger Abel, Druette Ludovic, Penisson Arnaud

Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort

Enseignant(s) : M. Aoustin et M. Forget

Chercheur : El Hamidi, Université de La Rochelle

Résumé

Dans cet article nous essayons de définir le barycentre de trois points sur la sphère. Nous proposons une construction purement géométrique, qui ne vérifie pas de relation vectorielle.

1 La notion de barycentre

1.1 Le barycentre de deux points

Définition 1.1. *Soit deux points A et B du plan. On associe une masse a à A et une masse b à B. Le barycentre est alors le point G tel que :*

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Physiquement parlant si l'on met des objets de masses différentes en équilibre sur une règle (voir figure 1), le barycentre correspond au point d'équilibre.

1.2 Le barycentre de trois points

Soit trois points A, B et C du plan. On associe une masse a à A, une masse b à B et une masse c à C.

Le barycentre est alors le point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

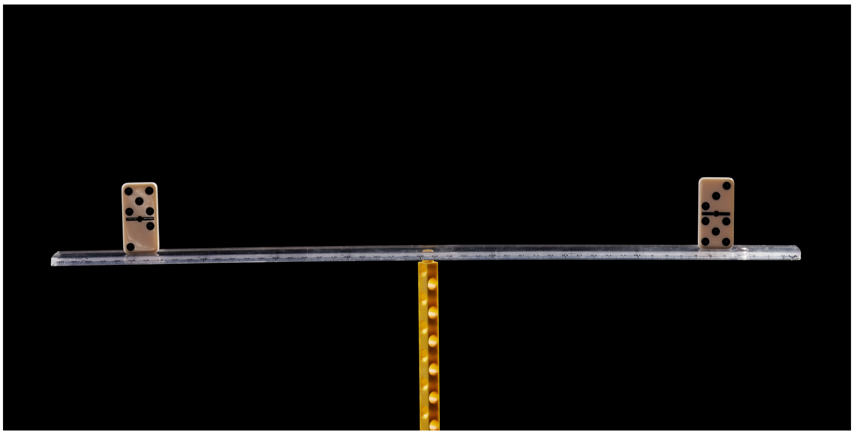


FIGURE 1 – Quand les masses a et b sont égales, le barycentre est le milieu

1.3 L'isobarycentre de trois points

L'isobarycentre est le cas particulier où les masses associées aux points sont égales.

Propriété 1.1. *L'isobarycentre des points A, B et C est l'intersection des médianes du triangle ABC.*

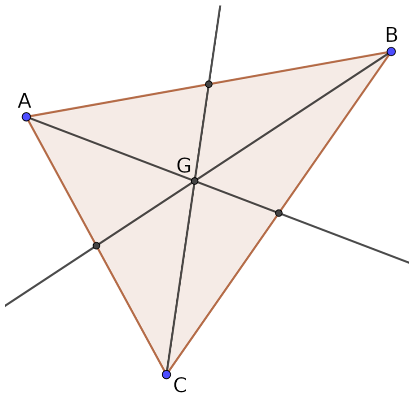


FIGURE 2 – L'isobarycentre est donc le centre de gravité

Propriété 1.2 (conséquence)**.** *Si l'on note A' le milieu de $[BC]$, on a :*

$$\overrightarrow{GA} + 2 \cdot \overrightarrow{GA'} = \vec{0}, \text{ ou encore } \overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$$

[1]

Démonstration. Relation de Chasles. □

2 Projection du triangle et de l'isobarycentre sur la sphère

Dans cette partie, nous expliquons comment projeter un triangle de l'espace sur une sphère. Puis nous mettons en avant, en les justifiant, les hypothèses que nous avons choisi.

2.1 Projection sur une sphère

Voir figure 3

2.2 Positionnement du triangle dans l'espace

Nous avons ensuite rencontré un problème de projection : Lorsque nous projettions le barycentre du triangle sur la sphère, nous pouvions modifier le triangle dans l'espace sans changer la forme du triangle projeté sur la sphère. Il nous suffisait de prendre un point du triangle (prenons A) et de le déplacer sur la droite (ΩA). Nous rencontrons alors un problème, car il existe alors une infinité de barycentre sur la sphère pour un seul triangle.

Il a fallu trouver un moyen pour fixer le triangle projeté et ainsi n'avoir qu'un seul barycentre. Il nous a alors fallu réfléchir au positionnement du triangle pour éviter ce problème.

Nous avons commencé par chercher une hypothèse qui amène les plans (ABC) et $(A'B'C')$ à être parallèles.

Propriété 2.1. *Le plan (ABC) est parallèle au plan $(A'B'C')$ si, et seulement si, $A\Omega = B\Omega = C\Omega$.*

Démonstration. On se place dans le plan $(BC\Omega)$ (voir figure 4).

On a $(BC)//(B'C')$ donc, par le théorème de Thalès :

$$\frac{B\Omega}{B'\Omega} = \frac{C\Omega}{C'\Omega}$$

Or $B'\Omega = C'\Omega$, car B' et C' sont sur la sphère, donc $B\Omega = C\Omega$.

On fait de même avec $(AB\Omega)$ et on en déduit :

$$A\Omega = B\Omega = C\Omega$$

L'équivalence est vraie car la réciproque du théorème de Thalès est vraie. □

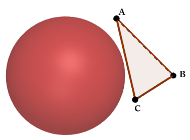
Propriété 2.2. *Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.*

*Les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles si, et seulement si, la droite perpendiculaire (ou **normale**) à (ABC) passant par Ω passe par O.*

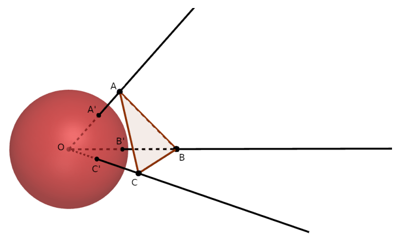
Démonstration. On se place dans le plan (ΩMA), où M est l'intersection de la normale et de (ABC) (voir figure 5)

ΩMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

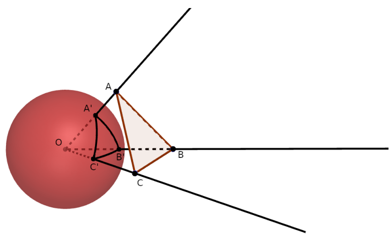
$$\Omega A^2 = MA^2 + \Omega M^2$$



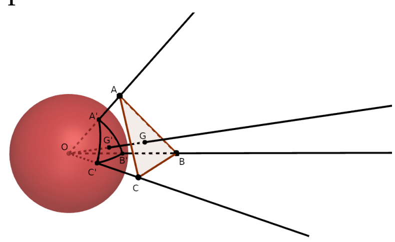
(a) On a notre sphère de centre Ω et notre triangle ABC dans l'espace



(b) On trace les demi-droites qui joignent le centre de la sphère aux sommets du triangle, les sommets projettés sont l'intersection des demi-droites avec la sphère



(c) On trace le triangle sur la sphère grâce aux grands cercles, qui sont les plus courts chemins sur la sphère (admis)



(d) On fait de même pour l'isobarycentre

FIGURE 3 – Méthode de projection sur la sphère

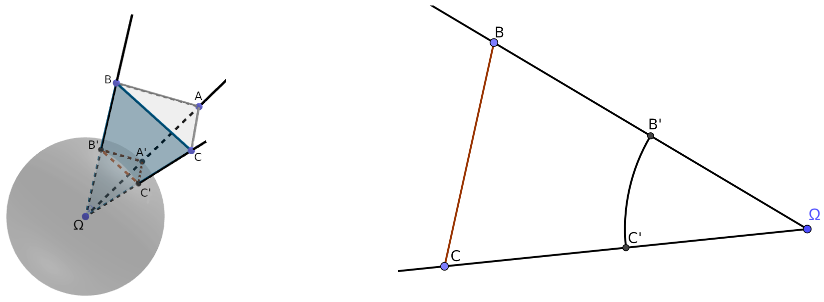


FIGURE 4 – Le plan $(BC\Omega)$ dans notre configuration

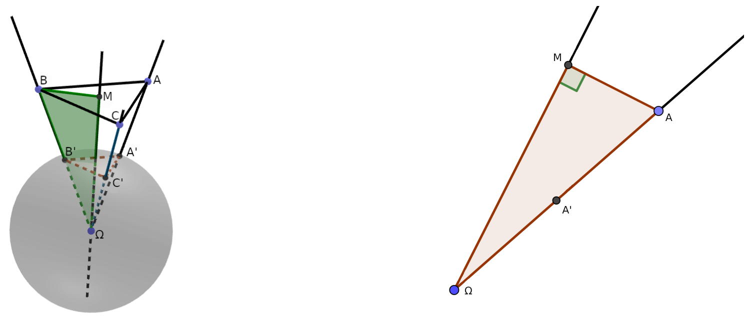


FIGURE 5 – Le plan (ΩMA) dans notre configuration

De même, en se plaçant dans (ΩMB) et dans (ΩMC), on arriverait à :

$$\Omega B^2 = MB^2 + \Omega M^2, \text{ et } \Omega C^2 = MC^2 + \Omega M^2$$

On a alors :

$$\begin{cases} \Omega A^2 = MA^2 + \Omega M^2 \\ \Omega B^2 = MB^2 + \Omega M^2 \\ \Omega C^2 = MC^2 + \Omega M^2 \end{cases}$$

Or $A\Omega = B\Omega = C\Omega$ par la propriété 2.1 donc $MA = MB = MC$. Le point M est donc le centre du cercle circonscrit O.

La réciproque est une conséquence de la réciproque de la propriété 2.1. $\square$

[2]

3 Résultats

3.1 Construction de l'isobarycentre sur la sphère

Propriété 3.1. *Entre deux plans parallèles, l'isobarycentre est conservé :*

C'est une conséquence directe du théorème de Thalès, qui implique une proportionnalité (voir figure 6).

Conséquence 3.1.1. *On peut travailler à partir du triangle $A'B'C'$.*

D'où une méthode pour construire l'isobarycentre sur la sphère (voir figure 7).

3.2 Les rapports

Propriété 3.2 (Conservation du milieu)**.** *La projection sur la sphère du milieu d'un des côtés du triangle est le milieu de l'arc obtenu par projection de ce triangle.*

Démonstration. Voir figure 8. □

Propriété 3.3 (Non conservation du découpage en trois)**.** *Soit $[AB]$ un côté du triangle et P un point tel que $AP = \frac{1}{3}AB$. Alors :*

$$\overset{\frown}{AP} \neq \overset{\frown}{AB}$$

où $\overset{\frown}{AP}$ désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AP}$.

[3]

Démonstration. Voir figure 9.

Conséquence 3.2.1.

$$\overset{\frown}{AP'} \neq \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$$

□

En fin de compte, les rapports ne sont, en général, pas conservés par la projection sur la sphère.

4 Synthèse

Notre construction de l'isobarycentre sur la sphère semble fonctionner, mais la relation vectorielle de la propriété 1.1 n'est pas vérifiée (*car les rapports ne sont pas conservés*). Donc on renonce à le caractériser avec une relation vectorielle

Pour le barycentre on renonce donc à une relation vectorielle sur la sphère mais graphiquement, en utilisant le logiciel Geogebra, on conjecture qu'une construction similaire à celle de L'isobarycentre fournit une construction effective du barycentre sur la sphère, dans le cas général.

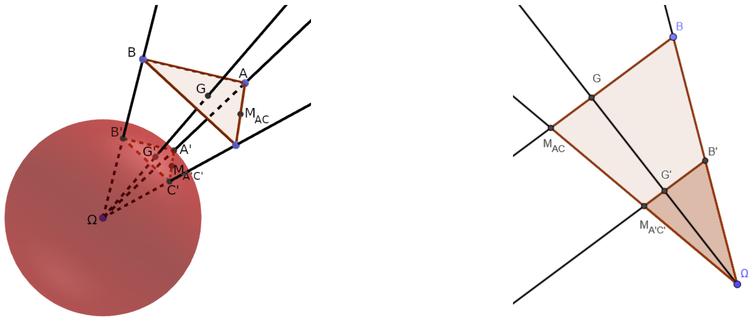
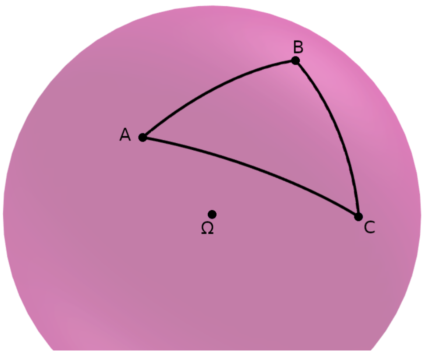
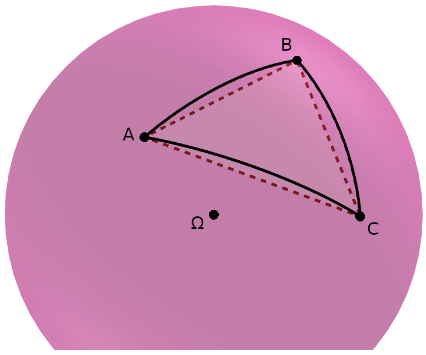


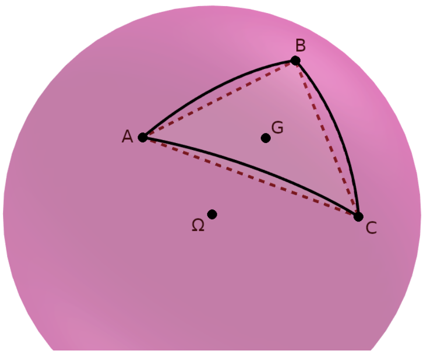
FIGURE 6 – Le plan $(GB\Omega)$ dans notre configuration



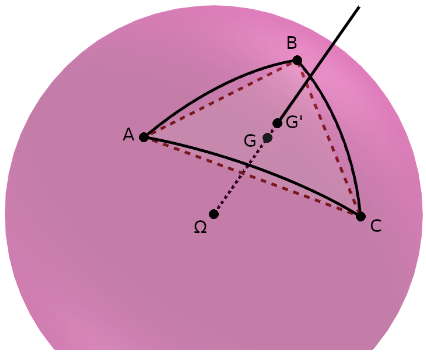
(a) On a trois points A, B, et C sur la sphère.



(b) On construit le triangle « plat » ABC

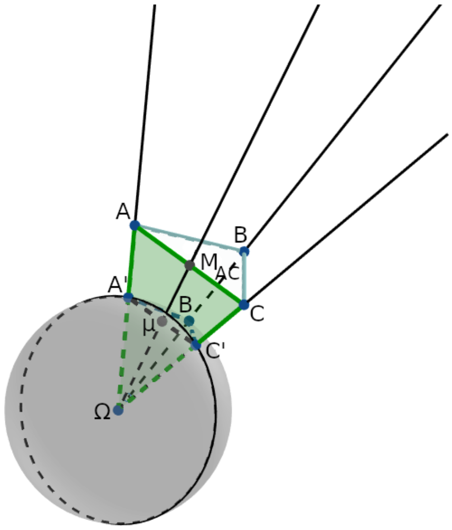


(c) On construit l'isobarycentre du triangle « plat »

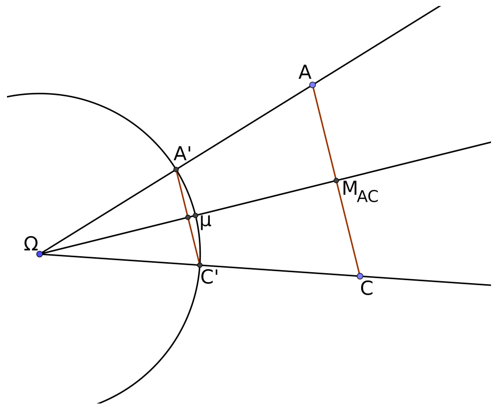


(d) On projette cet isobarycentre sur la sphère

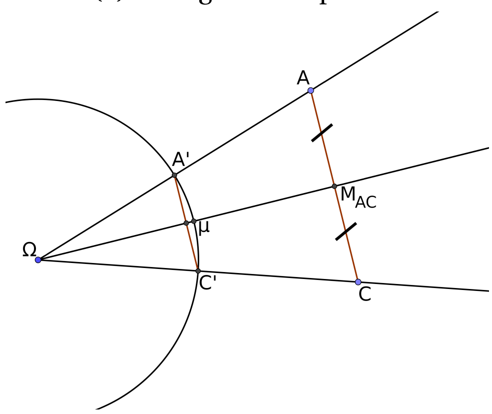
FIGURE 7 – Méthode de construction de l'isobarycentre sur une sphère



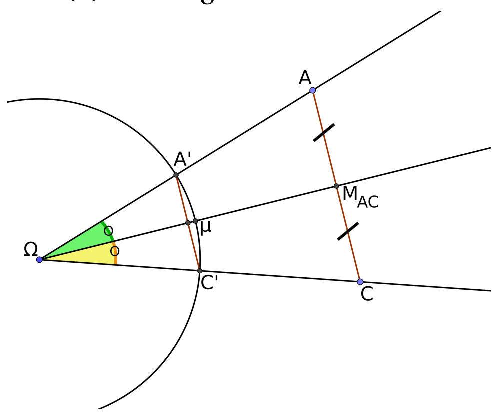
(a) Configuration spatiale



(b) Le triangle ΩAC est isocèle

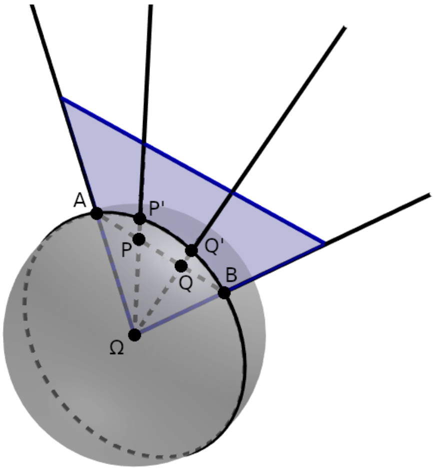


(c) Et la droite (ΩM_{AC}) est une médiane

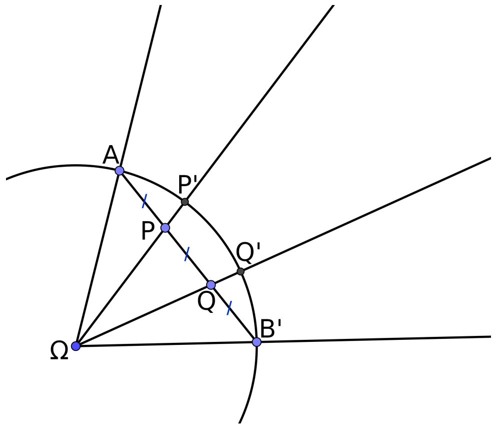


(d) C'est donc aussi une bissectrice

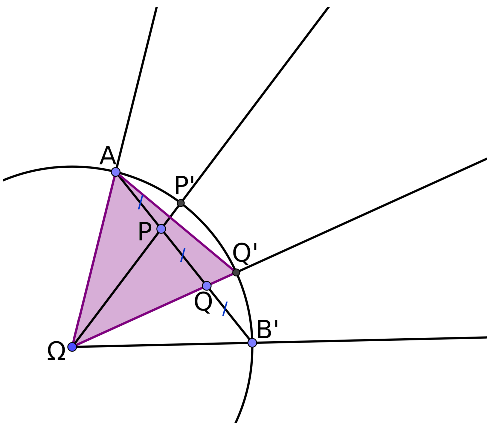
FIGURE 8 – Démonstration de la conservation des milieux



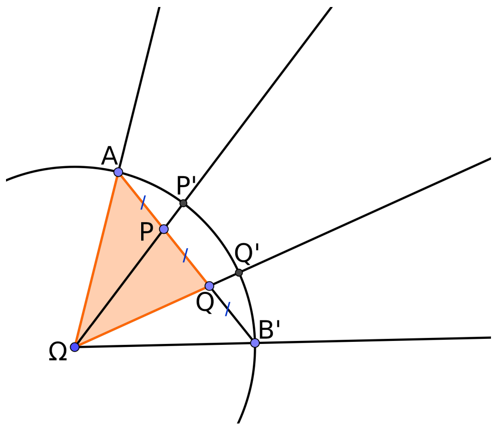
(a) Configuration spatiale



(b) Le triangle $\Omega AQ'$ est isocèle



(c) Donc le triangle ΩAQ n'est pas isocèle



(d) (ΩP) est la médiane donc n'est pas la bissectrice de $\widehat{\Omega AQ'}$

FIGURE 9 – Démonstration de la non conservation du découpage en trois

Notes d'édition

[1] En admettant que la propriété 1.1 (l'isobarycentre est l'intersection des médianes) est bien connue, on peut ajouter une précision : en effet, A' est le milieu de BC donc $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{0}$ et, comme $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GA'}-\overrightarrow{AA'}$, on a aussi $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$.
[2] Dans la démonstration, M désigne la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC), et on montre que les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles si et seulement si M est le centre du cercle circonscrit.
[3] Il faut plutôt écrire : Soit AB un côté du triangle, P le point du segment AB tel que $AP=\frac{1}{3}AB$ et P' sa projection sur la sphère. Alors $\overset{\frown}{AP'}\neq\frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$.